ELEMENTI
DI GEOMETRIA
E
TRIGONOMETRIA

DEL SIG. LEGENDRE

MEMBRO DELL'ISTITUTO DI FRANCIA
E DELLA LEGION D'ONORE
EC. EC.

NUOVAMENTE TRADOTTI IN ITALIANO
SULLA SETTIMA ED ULTIMA EDIZION DI PARIGI
CON ALCUNE ADDIZIONI

FIRENZE
PRESSO GUGLIELMO PIATTI
MDCCCIX.

ELEMENTI
DI GEOMETRIA

DEL SIG. LEGENDRE

EC. EC.

Digitized by Google

L'EDITORE

A CHI LEGGE

Esce per la seconda volta dai torchj Toscani la Versione Italiana della Geometria *di* Legendre, *ma unitamente alle* Note, *ed alla* Trigonometria piana *e* sferica *del medesimo Autore, che non erano state tradotte nè pubblicate nella prima Edizione di Pisa. Questa seconda versione, che si pubblica adesso, è stata diligentemente fatta sul Testo Francese di Didot della VII.ma ed ultima Edizion di Parigi, che rispetto alle precedenti ha molte variazioni ed aggiunte del precitato celebratissimo Matematico. Per comodo degli Studenti s' è giudicato espediente dividere l'Opera in due Volumi, riservando*

al II.° le Note, *che oltrepassano comunemente la capacità degli Studiosi nel primo anno o nella prima lettura degli* Elementi, *e le due* Trigonometrie, *che come quelle suppongono qualche notizia dell' Algebra. In virtù di questa separazione restando pochissime cose nel I.° Volume scritte in carattere più minuto di quello del Testo andante, e gli* Appendici *segnatamente dei Libri IV.° e VII.° non rassembrando esser tali da rimandarsi a una seconda lettura, s' è preso il partito di non cambiar forma nè grandezza di carattere in tutto il suddetto Tomo I.° degli* Elementi, *che vien ora alla luce. Atteso il consiglio d' alcuni dotti Geometri s' aggiunge alla* Trigonometria *di* Legendre *la pregevolissima* Memoria *analoga del Principe degli Analisti* Lagrange *inserita nel Tomo II.° del* Giornale della Scuola Politecnica *pubblicato a Parigi nell' Anno VII.°, insieme con un compendio della Dissertazione sopra l' istesso argomento, che si legge nel Tomo XII.° degli* Atti e Memorie della Società Italiana

delle Scienze *col titolo di* PARALELLI *ec.* DELLE DUE TRIGONOMETRIE, *della qual' ultima ne restano poche Copie vendibili nel Negozio Piatti in Firenze, unite ad altre* sugli usi della Logistica nella costruzione degli Organi. *Nulla s' è omesso di diligenza perchè la traduzione riescisse letterale e fedele quanto poteva permetterlo il genio diverso delle due Lingue; i termini tecnici son quei medesimi adoperati da altri valenti Scrittori Toscani; le* Tavole *delle* Figure *sono state incise e corrette colla massima accuratezza possibile; nè s' è posta tampoco in dimenticanza nella soggetta materia didascalica la purità dello stile coerentemente alla sintassi, interpunzione, e chiarezza degli enunciati, costruzioni, e dimostrazioni geometriche. Tutto quello in somma, che poteva dipendere per avventura dall'attenzione del traduttore; e dalla nitidezza e correzion della stampa, non è stato in niuna parte negletto, affinchè i Giovani Italiani, che s' iniziassero nelle Matematiche, s'assuefacessero di buonora a gustare*

la rigorosa Sintesi degli Antichi, ch' è il maggiore e più commendevol pregio di questi ELEMENTI, *i quali, come vera Logica universale, doverebber servire di Rudimenti preliminari a tutte le nobili Discipline, e Facoltà del sapere. Le replicate, e sempre applaudite Edizioni, che di là dai Monti, e in Italìa sonosi succedute rapidamente, attestano a un tempo e l' universale accoglienza dell' Opera, che ora si riproduce; e l' utilità della pubblica Istruzione sperimentatane dalle Scuole, Accademie, e Licei mercè delle dotte fatiche impiegate in comporla, accrescerla, e riordinarla dal rispettabile Autore.*

ELEMENTI

DI

GEOMETRIA

LIBRO PRIMO.

I PRINCIPJ

DEFINIZIONI

1. La Geometria è una scienza, che ha per oggetto la misura dell'estensione.

L'estensione ha tre dimensioni, lunghezza, larghezza, ed altezza.

2. La *Linea* è una lunghezza senza larghezza.

Le estremità d'una linea si chiamano *punti*: il punto non ha dunque alcuna estensione.

3. La *Linea retta* è il più corto cammino da un punto a un altro.

4. Ogni linea, che non è retta, nè composta di linee rette, è una *linea curva*.

Così AB è una linea retta, ACDB una linea spezzata, o composta di linee rette, e AEB è una linea curva. Fig. 1.

Digitized by Google

5. *Superficie* è ciò che ha lunghezza, e larghezza senza altezza, o grossezza.

6. Il *Piano* è una superficie, nella quale prendendo due punti a piacere, e unendo questi due punti con una linea retta, questa linea sta tutta nella superficie.

7. Ogni superficie, che non è piana, nè composta di superficie piane, è una *superficie curva.*

8. *Solido*, o *Corpo* è ciò che riunisce le tre dimensioni dell' estensione.

Fig. 2. 9. Quando due linee rette AB, AC s' incontrano, la quantità più o meno grande, di cui sono distanti quanto alla lor posizione, l'una dall' altra si chiama *angolo*; il punto d' incontro, o d' intersezione A è il *vertice* dell' angolo, le linee AB, AC ne sono i *lati*.

L' angolo s'indica talora colla sola lettera del vertice A, talora con tre lettere BAC o CAB, osservando di porre in mezzo la lettera del detto vertice. Gli angoli sono, come tutte le quantità, suscettibili d' addizione, di sottrazione, di moltiplicazione, e di
Fig. 20. divisione: così l'angolo DCE è la somma dei due angoli DCB, BCE, e l'angolo DCB è la differenza dei due angoli DCE, BCE.

Fig. 3. 10. Quando la linea retta AB incontra un' altra linea CD talmente che gli angoli adiacenti BAC, BAD siano uguali fra loro, ognuno di questi angoli si chiama un *angolo retto*, e la linea AB vien detta *perpendicolare* sopra CD.

Fig. 4. 11. Ogni angolo BAC minore d' un angolo retto è un *angolo acuto*; ogni angolo maggiore DEF è un *angolo ottuso*.

12. Due linee si dicono *paralelle* quando essendo situate nel medesimo piano non possono incontrarsi fra loro, benchè si prolunghino ambedue a qualunque distanza. Fig. 5.

13. *Figura piana* è un piano terminato per ogni parte da linee.

Se le linee sono rette, lo spazio che esse racchiudono si chiama *figura rettilinea*, o *poligono*, e le linee stesse prese insieme formano il contorno o *perimetro* del poligono. Fig. 6.

14. Il poligono di tre lati è il più semplice di tutti, e si chiama *triangolo;* quello di quattro lati si chiama *quadrilatero;* quello di cinque *pentagono;* quello di sei *esagono*, ec.

15. Si chiama triangolo *equilatero* quello che ha i tre lati uguali; triangolo *isoscele* quello di cui due soli lati sono uguali; triangolo *scaleno* quello che ha i tre lati disuguali. Fig. 7. Fig. 8. Fig. 9.

16. Il triangolo *rettangolo* è quello che ha un angolo retto. Il lato opposto all'angolo retto si chiama *ipotenusa*. Così ABC è un triangolo rettangolo in A, e il lato BC è la di lui ipotenusa, e CA, BA sono i cateti. Fig. 10.

17. Fra i quadrilateri si distingue:

Il *quadrato*, che ha i lati uguali, e gli angoli retti. (Vedete la Prop. XXI. lib. I.) Fig. 11.

Il *rettangolo* che ha gli angoli retti senz'avere i lati uguali. (Vedete la medesima Proposizione). Fig. 12.

Il *paralellogrammo* o *Romboide* che ha i lati opposti paralelli. Fig. 13.

Il *Rombo*, i di cui lati sono eguali senza che gli angoli siano retti. Fig. 14.

(a) e gli altri due formanti l'angolo retto si chiamano Cateti.

N. del Traduttore.

Fig. 15. Finalmente il *Trapezio* di cui due soli lati son paralelli.

18. Si chiama diagonale la linea che unisce i vertici di due angoli non adiacenti: Fig. 42. tale è AC.

19. Poligono *equilatero* è quello di cui tutti i lati sono uguali; Poligono *equiangolo* quello di cui tutti gli angoli sono uguali.

20. Due Poligoni sono *equilateri fra loro* quando hanno i lati uguali respettivamente, e situati nel medesimo ordine, vale a dire, allorchè seguitando il loro contorno pel medesimo verso il primo lato dell'uno è eguale al primo dell'altro, il secondo dell'uno al secondo dell'altro, il terzo al terzo, e così di seguito. Nella stessa maniera si concepisce cosa s'intende per due Poligoni *equiangoli fra loro*.

In ambedue i casi i lati uguali o gli angoli uguali si chiamano lati o angoli *omologhi*.

N. B. Ne' quattro primi Libri non si tratterà che delle figure piane, o fatte sopra una superficie piana.

Spiegazione de' termini, e de' segni.

Assioma è una proposizione evidente da per se stessa.

Teorema è una verità che diviene evidente per mezzo d'un ragionamento chiamato *dimostrazione*.

Problema è una questione proposta che esige una *soluzione*.

Lemma è una verità impiegata sussidiaria-

mente per la dimostrazione d'un teorema, o la soluzione d'un problema.

Il nome comune di *proposizione* si attribuisce indifferentemente ai teoremi, problemi, e lemmi.

Corollario è la conseguenza che deriva da una o più Proposizioni.

Scolio è un'osservazione sopra una o più Proposizioni precedenti, tendente a far vedere il loro legame, la loro utilità, la loro restrizione, o la loro maggiore estensione.

Ipotesi è una supposizione fatta o nell'enunciato d'una Proposizione, o nel corso d'una dimostrazione.

Il segno = è il segno dell'uguaglianza; così l'espressione A=B significa che A è uguale a B.

Per esprimere che A è minore di B, si scrive A<B.

Per esprimere che A è maggiore di B, si scrive A>B.

Il segno + si pronunzia *più*, e indica l'addizione.

Il segno — si pronunzia *meno*, e indica la sottrazione. Così A+B rappresenta la somma delle quantità A e B; A—B rappresenta la loro differenza, o ciò che resta togliendo B da A: così A—B+C, o A+C—B significa che A e C debbono essere aggiunte insieme, e che B dev'esser tolta dal totale.

Il segno × indica la moltiplicazione; così A×B rappresenta il prodotto d'A moltiplicato per B. In vece del segno × si adopera talora un punto; così A.B è lo stesso che A×B. S'indica ancora il medesimo prodotto senza alcun

segno intermedio da AB; ma non bisogna impiegare questa espressione che quando non si ha nel medesimo tempo da impiegare come fattore la linea AB, distanza dei punti A e B.

L'espressione $A \times (B+C-D)$ indica il prodotto di A per la quantità B+C—D. Se bisognasse moltiplicare A+B per A—B+C, s'indicherebbe il prodotto così $(A+B)\times(A-B+C)$. Tutto ciò che è rinchiuso tra parentesi è considerato come una sola quantità.

Un numero posto innanzi a una linea o a una quantità serve di moltiplicatore a questa linea o a questa quantità; così, per esprimere che la linea AB è presa tre volte, si scrive 3AB; per indicare la metà dell'angolo A, si scrive $\frac{1}{2}$ A.

Il quadrato della linea AB s'indica con $\overline{AB}^2$; il suo cubo con $\overline{AB}^3$. Si spiegherà a suo luogo ciò che significa propriamente il quadrato, e il cubo d'una linea.

Il segno $\surd$ indica una radice da estrarsi: così $\surd 2$ è la radice quadrata di 2; $\surd \overline{A \times B}$ è la radice del prodotto $A \times B$, o la media proporzionale tra A e B.

ASSIOMI

1. Due quantità uguali a una terza sono uguali fra loro.
2. Il tutto è maggiore della sua parte.
3. Il tutto è uguale alla somma delle parti, nelle quali è stato diviso.

4. Da un punto a un altro non si può condurre che una sola linea retta.

5. Due grandezze, linee, superficie, o solidi, sono uguali allorchè, essendo situate l'una sull'altra, coincidono in tutta la loro estensione

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA

Gli angoli retti sono tutti eguali fra loro.

Sia la linea retta CD perpendicolare ad AB e GH ad EF, dico che gli angoli ACD, EGH saranno uguali fra loro. Fig. 16.

Prendete le quattro distanze uguali CA, CB, GE, GF, la distanza AB sarà uguale alla distanza EF, e si potrà situare la linea EF sopra AB in maniera che il punto E cada in A, e il punto F in B. Queste due linee così situate coincideranno intieramente l'una con l'altra; poichè altrimenti vi sarebbero due linee rette da A a B, il che è impossibile *; dunque il punto G mezzo di EF cadrà sul punto C mezzo d'AB. Essendo così il lato GE applicato sopra CA, dico che il lato GH cadrà sopra CD; poichè supponiamo, s'è possibile, che cada sopra una linea CK differente da CD; siccome, per supposizione *, l'angolo EGH=HGF, bisognerebbe che fosse ACK=KCB. Ma l'angolo ACK è maggiore di ACD, e l'angolo KCB è minore di BCD; d'altronde, per supposizione, ACD=BCD; dunque ACK è maggiore di KCB; dunque la linea GH non può cadere sopra una linea CK diffe-

* Ass. 4.

* Def. 10.

rente da CD; dunque essa cade sopra CD, e l'angolo EGH sopra ACD; dunque tutti gli angoli retti sono uguali fra loro.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA

Fig. 17. *Ogni linea retta* CD *che ne incontra un' altra* AB, *fa con questa due angoli adiacenti* ACD, BCD, *la di cui somma è uguale a due angoli retti.*

Dal punto C alzate sopra AB la perpendicolare CE L'angolo ACD è la somma degli angoli ACE, ECD; dunque ACD+BCD sarà la somma de' tre ACE, DCE, BCD. Il primo di questi è retto, gli altri due fanno insieme l'angolo retto BCE dunque la somma dei due angoli ACD, BCD è uguale a due angoli retti.

Corollario I. Se uno degli angoli ACD, BCD è retto, l'altro lo sarà parimente.

Fig. 18. *Corollario II.* Se la linea DE è perpendicolare ad AB, reciprocamente AB sarà perpendicolare a DE.

Poichè dall' esser DE perpendicolare ad AB ne segue che l'angolo ACD è uguale al suo adiacente DCB, e che sono ambedue retti. Ma dall' essere ACD un angolo retto ne segue che il suo adiacente ACE è pure un angolo retto: dunque l'angolo ACE=ACD; dunque AB è perpendicolare a DE.

Fig. 34. *Corollario III.* Tutti gli angoli consecutivi BAC, CAD, DAE, EAF, formati da una medesima parte della retta BF, presi insieme, valgono due angoli retti, perchè la lor somma è eguale a quella dei due angoli BAC, CAF.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA

Due linee rette, che hanno due punti comuni, coincidono l'una coll'altra in tutta la loro estensione, e non formano che una sola e medesima linea

Siano i due punti comuni A e B; prima di tutto le due linee non ne devono formare che una sola fra A e B, poichè altrimenti vi sarebbero due linee rette da A a B, il che è impossibile *. Supponiamo in seguito che queste linee, essendo prolungate, comincino a separarsi al punto C, l'una divenendo CD, l'altra CE. Conduciamo al punto C la linea CF che faccia con CA l'angolo retto BCF. Poichè la linea ACD è retta, l'angolo FCD sarà un angolo retto *; poichè la linea ACE è retta, l'angolo FCE sarà parimente un angolo retto. Ma la parte FCE non può essere uguale al tutto FCD; dunque le linee rette, che hanno due punti A e B comuni, non possono separarsi in verun punto del loro prolungamento; dunque non formano che una sola e medesima linea retta. Fig. 19. * Ass. 4. * Pr. 2. Cor. 1.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA

Se due angoli adiacenti ACD, DCB *equivalgono insieme a due angoli retti, i due lati* AC, CB *saranno in linea retta.* Fig. 20.

Poichè se CB non è il prolungamento di AC, sia CE questo prolungamento; allora essendo retta la linea ACE, la somma degli

angoli ACD, DCE sarà uguale a due retti. Ma, per supposizione, la somma degli angoli
* Pr. 2. ACD, DCB è pure uguale a due retti; * dunque ACD+DCB sarebbe uguale ad ACD+DCE; togliendo da ambe le parti l'angolo ACD, resterebbe DCB=DCE, o la parte uguale al tutto, il che è impossibile. Dunque CB è il prolungamento d'AC.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA

Fig. 21. *Tutte le volte che due linee rette* AB, DE *si tagliano, gli angoli opposti al vertice sono uguali.*

Poichè, siccome la linea DE è retta, la somma degli angoli ACD, ACE è uguale a due retti; e siccome la linea AB è retta, la somma degli angoli ACE, BCE è pure uguale a due retti. Dunque la somma ACD+ACE è uguale alla somma ACE+BCE. Togliendo da ambe le parti lo stesso angolo ACE, resterà l'angolo ACD uguale al suo opposto BCE.

Si dimostrerebbe medesimamente che l'angolo ACE è uguale al suo opposto BCD.

Scolio. I quattro angoli formati intorno a un punto da due rette che si tagliano, equivalgono insieme a quattro angoli retti. Poichè gli angoli ACE, BCE presi insieme equivalgono a due angoli retti; e gli altri due ACD, BCD hanno lo stesso valore.

Fig 22. In generale, se quante si voglian rette CA, CB ec. s'incontrano in un punto C, la somma di tutti gli angoli consecutivi ACB, BCD, DCE, ECF, FCA sarà uguale a quattro an-

goli retti. Poichè se si formassero al punto C quattro angoli retti col mezzo di due linee perpendicolari fra loro, lo stesso spazio sarebbe occupato tanto da' quattro angoli retti, che dagli angoli successivi ACB, BCD ec.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA

Due triangoli sono uguali quando hanno un angolo uguale compreso tra lati respettivamente uguali.

Sia l'angolo A uguale all'angolo D, il lato AB uguale a DE, il lato AC uguale a DF; dico che i triangoli ABC, DEF saranno uguali. Fig. 23.

In fatti questi triangoli possono esser posti l'uno sull'altro in maniera che coincidano perfettamente. E in primo luogo, se si pone il lato DE sul suo uguale AB, il punto D cadrà in A, e il punto E in B. Ma poichè l'angolo D è uguale all'angolo A, subito che DE sarà situato sopra AB, il lato DF prenderà la direzione AC. Di più DF è uguale ad AC; dunque il punto F cadrà in C, e il terzo lato EF coprirà esattamente il terzo lato BC, dunque il triangolo DEF è uguale al triangolo ABC. Ass. 5.

Corollario. Dunque, dall'essere uguali tre cose in due triangoli; cioè, l'angolo A=D, AB=DE, AC=DF, si può conchiudere che le altre tre lo son pure, cioè, l'angolo B=E, l'angolo C=F, e il lato BC=EF.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA

Due triangoli sono uguali quando hanno

un lato uguale adiacente a due angoli respettivamente uguali.

Fig. 23. Sia il lato BC uguale al lato EF, l'angolo B uguale all'angolo E, e l'angolo C all'angolo F; dico che il triangolo DEF sarà uguale al triangolo ABC.

Poichè, per eseguire la soprapposizione, sia situato EF sul suo uguale BC, il punto E cadrà in B, e il punto F in C. Poichè l'angolo E è uguale all'angolo B, il lato ED prenderà la direzione di BA, onde il punto D si troverà su qualche punto della linea BA. Così, poichè l'angolo F è uguale all'angolo C, la linea FD prenderà la direzione di CA, e il punto D si troverà su qualche punto del lato CA; dunque il punto D, che dee trovarsi a un tempo stesso sulle due linee BA, CA, cadrà sulla loro intersezione A; dunque i due triangoli ABC, DEF coincidono l'uno coll'altro, e sono perfettamente uguali.

Corollario. Dunque, dall'essere uguali tre cose in due triangoli, cioè, BC=EF, B=E, C=F, si può conchiudere che le tre altre son pure uguali, cioè, AB=DE, AC=DF, A=D.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA

In un triangolo un lato qualunque è minore della somma degli altri due.

Fig. 23. Poichè la linea retta BC, per esempio, è
*Def. 3. il più corto cammino da B in C, * ne vien che BC è minore di BA+AC.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA

Se da un punto O *preso dentro al trian-* Fig. 24.
golo ABC *si conducono alle estremità d' un lato* BC *le linee rette* OB, OC, *la somma di queste linee sarà minore di quella degli altri due lati* AB, AC.

Sia prolungato BO finchè incontri il lato AC in D; la linea retta OC è più corta di OD+DC; aggiungendo da ambe le parti BO, si avrà BO+OC<BO+OD+DC, o BO+OC <BD+DC.

Si ha parimente BD<BA+AD; aggiungendo da ambe le parti DC, si avrà BD+DC <BA+AC. Ma avevamo trovato BO+OC <BD+DC; dunque con maggior ragione BO+OC<BA+AC.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA

Se i due lati AB, AC *del triangolo* ABC *so-* Fig. 25.
no uguali respettivamente ai due lati DE, DF *del triangolo* DEF, *e se nel tempo stesso l' angolo* BAC *compreso da' primi è maggiore dell' angolo* EDF *compreso da' secondi, dico che il terzo lato* BC *del primo triangolo sarà maggiore del terzo* EF *del secondo.*

Fate l'angolo CAG=D, prendete AG= DE, e tirate CG; il triangolo GAC sarà uguale al triangolo DEF, giacchè hanno, per costruzione, un angolo uguale compreso fra lati uguali; * si avrà dunque CG=EF. Ora * Pr. 6.
possono darsi tre casi secondo che il punto

G cade fuori del triangolo ABC, o sul lato BC, o dentro del medesimo triangolo.

Fig 25. *Primo caso*. La linea retta GC è più corta di GI+IC; la linea retta AB è più corta di AI+IB; dunque GC+AB è più corta di GI+AI+IC+IB, o, ciò che torna lo stesso, GC+AB<AG+BC. Togliendo da una parte AB, e dall'altra la sua uguale AG, resterà GC<BC; ma GC=EF; dunque EF<BC.

Fig. 26. *Secondo caso*. Se il punto G cade sul lato BC, è chiaro che GC, o la sua uguale EF sarà minor di BC.

Fig. 27. *Terzo caso*. Se il punto G cade dentro il triangolo ABC, si avrà, per il teorema precedente, AG+GC<AB+BC. Togliendo da una parte AG, e dall'altra la sua uguale AB, resterà GC<BC, o EF<BC.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA

Due triangoli sono eguali allorchè hanno i tre lati respettivamente eguali.

Fig. 23. Sia il lato AB=DE, AC=DF, BC=EF; dico che sarà l'angolo A=D, B=E, C=F.

Poichè, se l'angolo A fosse maggiore dell'angolo D, siccome i lati AB, AC sono respettivamente uguali ai lati DE, DF, ne seguirebbe per il teorema precedente che il lato BC sarebbe maggiore di EF; e se l'angolo A fosse minore di D, ne seguirebbe che il lato BC sarebbe minore di EF; ma BC è uguale ad EF; dunque l'angolo A non può essere nè maggiore nè minore dell'angolo D; dunque gli è uguale. Si proverà nello stesso

modo che l'angolo B=E, e che l'angolo C=F.

Scolio. Si può osservare che gli angoli uguali sono opposti ai lati uguali. Così gli angoli uguali A, e D sono opposti ai lati uguali BC, EF.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA

In un triangolo isoscele gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali.

Sia il lato AB=AC; dico che sarà l'angolo B=C. Fig. 28.

Tirate la linea AD dal *vertice* A al punto D mezzo della base BC; i due triangoli ABD, ADC avranno i loro tre lati respettivamente uguali, cioè, AD comune, AB=AC per supposizione, e BD=DC per costruzione; dunque, in virtù del teorema precedeute, l'angolo B è uguale all'angolo C.

Corollario. Un triangolo equilatero è nel medesimo tempo *equiangolo*, cioè ha tutti i suoi angoli uguali.

Scolio. L'uguaglianza de' triangoli ABD, ACD prova nel tempo stesso che l'angolo BAD=DAC, e che l'angolo BDA=ADC; dunque questi due ultimi sono retti; dunque *la retta condotta dal vertice d'un triangolo isoscele al mezzo della sua base è perpendicolare alla base, e divide l'angolo al vertice in due parti uguali.*

In un triangolo non isoscele si prende indifferentemente per *base* un lato qualunque,

ed allora il *vertice* è quello dell' angolo opposto. Nel triangolo isoscele si prende particolarmente per *base* il lato, che non è uguale agli altri.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA

Reciprocamente, se due angoli sono uguali in un triangolo, i lati opposti saranno pure uguali, e il triangolo sarà isoscele.

Sia l'angolo ABC=ACB; dico che il lato
Fig. 29. AC sarà uguale al lato AB.

Poichè, se questi lati non sono uguali sia AB il maggiore d'essi. Prendete BD=AC, e tirate DC. L'angolo DBC è, per supposizione, uguale all'angolo ACB; i due lati DB, BC sono uguali ai due AC, BC; dun-
* Pr. 6. que il triangolo DBC * sarebbe eguale al triangolo ACB: ma la parte non può essere eguale al tutto; dunque non vi è ineguaglianza tra i lati AB, AC; dunque il triangolo ABC è isoscele

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA

Di due lati d'un triangolo il maggiore è quello, che è opposto ad un angolo maggiore, e reciprocamente di due angoli d'un triangolo il maggiore è quello, che è opposto ad un lato maggiore.

Fig. 30. 1.° Sia l'angolo C>B; dico che il lato AB opposto all'angolo C è maggiore del lato AC opposto all'angolo B.

Sia fatto l'angolo BCD=B; nel triangolo

BDC si avrà * BD=DC. Ma la linea retta AC è più corta di AD+DC, e AD+DC = AD+DB=AB. Dunque AB è maggiore d'AC. *Pr. 13.

2.° Sia il lato AB>AC; dico che l'angolo C opposto al lato AB sarà maggiore dell'angolo B opposto al lato AC.

Poichè, se fosse C<B, seguirebbe da ciò, che si è dimostrato, che AB sarebbe minore d'AC; il che è contro della supposizione. Se poi fosse C=B, sarebbe * AB=AC; il che è pure contro della supposizione. Dunque bisogna che l'angolo C sia maggiore di B. *Pr. 13.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA

Da un punto dato A *fuori d'una retta* DE *non si può condurre che una sola perpendicolare a questa retta.* Fig. 31.

Poichè supponiamo che se ne possano condurre due AB, e AC; prolunghiamo una d'esse AB d'una lunghezza BF=AB, e tiriamo FC.

Il triangolo CBF è uguale al triangolo ABC, poichè l'angolo CBF è retto, come pure CBA, il lato CB è comune, e il lato BF=AB. Dunque questi triangoli sono uguali *; e ne segue che l'angolo BCF=BCA. L'angolo BCA è retto, per supposizione; dunque l'angolo BCF lo è pure. Ma se gli angoli adiacenti BCA, BCF equivalgono insieme a due angoli retti, bisogna che la linea ACF sia retta *; donde resulta che fra i due medesimi punti A, e F si potrebbero condurre due linee rette ABF, ACF, il che è impossibile *; dunque *Pr. 6. *Pr. 4. *Ass. 4.

è parimente impossibile che da un medesimo punto sian condotte due perpendicolari sulla medesima linea data.

Fig. 17. *Scolio*. Da un medesimo punto C dato sopra la linea AB è egualmente impossibile di condurre due perpendicolari a questa linea: perchè se CD, e CE fossero queste due perpendicolari, l'angolo DCB sarebbe retto, come pure BCE, e la parte sarebbe eguale al tutto.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA

Fig. 31. *Se da un punto* A *situato fuori d'una retta* DE *si conducono la perpendicolare* AB *su questa retta, e differenti oblique* AE, AC, AD, ec. *a differenti punti di questa medesima retta,*

1.° *La perpendicolare* AB *sarà più corta d'ogni obliqua.*

2.° *Le due oblique* AC, AE, *condotte da una parte e dall'altra della perpendicolare a distanze uguali* BC, BE, *saranno uguali.*

3.° *Di due oblique* AC *e* AD, *o* AE *e* AD, *condotte come si vorrà, quella, che si allontani di più dalla perpendicolare, sarà la più lunga.*

Sia prolungata la perpendicolare AB d'una lunghezza BF=AB, e siano tirate FC, FD.

1.° Il triangolo BCF è uguale al triangolo BCA, perchè l'angolo retto CBF=CBA, il lato CB è comune, e il lato BF=BA; *Pr. 6 dunque * il terzo lato CF è uguale al terzo AC. Ora ABF linea retta è più corta d'ACF

linea spezzata; dunque AB metà d'ABF è più corta d'AC metà d'ACF; dunque 1.° la perpendicolare è più corta d'ogni obliqua.

2.° Se si suppone BE=BC, siccome si hanno inoltre AB comune, e l'angolo ABE=ABC, ne segue che il triangolo ABE è uguale al triangolo ABC. Dunque i lati AE, AC sono uguali. Dunque 2.° due oblique, che sono lontane ugualmente dalla perpendicolare, sono uguali.

3.° Nel triangolo ADF la somma delle linee AC, CF è minore * della somma de' lati AD, DF. Dunque AC, metà della linea ACF, è minore d'AD, metà di ADF. Dunque 3.° le oblique, che sono più lontane dalla perpendicolare, son le più lunghe. * Pr. 9.

Corollario I. La perpendicolare misura la vera distanza d'un punto da una linea, poichè è la più corta d'ogni obliqua.

Corollario II. Da un medesimo punto non si possono condurre a una medesima linea tre rette uguali. Poichè, se ciò fosse, vi sarebbero da una medesima parte della perpendicolare due oblique uguali; il che è impossibile.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA

Se dal punto C, *mezzo della linea* AB, *si alza su questa linea la perpendicolare* EF; 1.° *ogni punto della perpendicolare sarà ugualmente distante dalle due estremità della linea* AB; 2.° *ogni punto fuori della perpen-* Fig. 32.

dicolare sarà disugualmente distante dalle medesime estremità A, *e* B.

Poichè 1.° siccome si suppone AC=CB, le due oblique AD, DB s'allontanano ugualmente dalla perpendicolare; dunque sono uguali: lo stesso accade delle due oblique AE, EB, delle due AF, FB ec. Dunque 1.° ogni punto della perpendicolare è ugualmente distante dalle estremità A, e B.

2.° Sia I un punto fuori della perpendicolare; se si tirano IA, IB, una di queste linee taglierà la perpendicolare in D, d'onde tirando DB si avrà DB=DA Ma la linea retta IB è più corta che la linea spezzata ID+DB, e ID+DB=ID+DA=IA; dunque IB<IA; dunque 2.° ogni punto fuori della perpendicolare sarà disugualmente distante dalle estremità A, e B.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA

Due triangoli rettangoli sono uguali quando hanno l'ipotenusa uguale, e un lato uguale.

Fig. 33. Sia l'ipotenusa AC=DF, e il lato AB=DE; dico che il triangolo rettangolo ABC sarà uguale al triangolo rettangolo DEF.

L'uguaglianza sarebbe manifesta se il terzo lato BC fosse uguale al terzo EF. Supponiamo, s'è possibile, che questi lati nou siano uguali, e che BC sia il maggiore. Prendete BG=EF, e tirate AG. Il triangolo ABG è uguale al triangolo DEF, perchè l'angolo retto B è uguale all'angolo retto E, il lato

AB=DE, e il lato BG=EF; dunque questi due triangoli sono uguali *, e si ha per conseguenza AG=DF: ma, per supposizione, DF=AC; dunque AG=AC. Oltracciò l'obliqua AC non può essere uguale ad AG *, giacchè è più lontana dalla perpendicolare AB; dunque è impossibile che BC differisca da EF; dunque il triangolo ABC è uguale al triangolo DEF. * Pr. 6. * Pr. 16.

PROPOSIZIONE XIX.

LEMMA

La somma dei tre angoli d'un triangolo non può esser maggiore di due angoli retti.

Sia, se è possibile, ABC un triangolo, nel quale la somma dei tre angoli è più grande di quella di due angoli retti. Fig. 35.

Sopra AC prolungata prendete CE=AC; fate l'angolo ECD=CAB, e il lato CD=AB; unite DE, e BD. Il triangolo CDE sarà eguale al triangolo BAC, poichè essi hanno un angolo eguale compreso tra lati respettivamente eguali *; dunque si avrà l'angolo CED=ACB, l'angolo CDE=ABC, e il terzo lato ED eguale al terzo BC. * Pr. 6.

Poichè la linea ACE è retta, la somma degli angoli ACB, BCD, DCE è eguale a due angoli retti *; ma si suppone la somma degli angoli del triangolo maggiore di due retti; si avrà dunque CAB+ABC+ACB>ACB+BCD+ECD; togliendo da ambe le parti ACB comune, e CAB=ECD, resterà ABC>BCD; e perchè i lati AB, BC del triangolo ABC sono eguali * Pr. 2. Cor. 3.

ai lati CD, CB del triangolo BCD, ne segue che il terzo lato AC è più grande che il terzo BD *.

*Pr. 10.

Immaginiamo adesso che si prolunghi indefinitamente la linea AC, come pure la serie dei triangoli ABC, CDE, EFG, GHI, ec.; se si uniscono i vertici più vicini con le rette BD, DF, FH, HK, ec. si formerà nel medesimo tempo una serie di triangoli intermedj BCD, DEF, FGH, ec. che saranno tutti eguali tra loro, perchè avranno un angolo eguale compreso tra lati eguali respettivamente; dunque si avrà BD=DF=FH=HK, ec.

Ciò posto, poichè si ha AC>BD, sia la differenza AC—BD=D; è chiaro che 2D sarà la differenza tra la linea retta ACE eguale a 2AC, e la linea retta o spezzata BDF eguale a 2BD; di maniera che si avrà AE—BF=2D. Si avrà parimente AG—BH=3D, AI—BK=4D, e così di seguito. Ora, per quanto piccola sia la differenza D, è evidente che questa differenza, ripetuta un numero di volte sufficiente diverrà più grande di una lunghezza qualunque data. Si potrà dunque supporre la serie dei triangoli prolungata tanto lontano finchè si abbia AP—BQ>2AB; e così si avrebbe AP>BQ+2AB. Ma per il contrario la linea retta AP è più corta che la linea angolosa ABQP, che unisce le medesime estremità A e P, in modo che si avrà sempre AP<AB+BQ+QP, ovvero AP<BQ+2AB; dunque l'ipotesi, da cui siamo partiti, è assurda;

dunque la somma de' tre angoli del triangolo ABC non può esser più grande di due angoli retti.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA

In qualunque triangolo la somma dei tre angoli è uguale a quella di due angoli retti.

Avendo di già provato che la somma dei tre angoli d'un triangolo non può esser maggiore di due angoli retti, resta da dimostrare che questa somma non può esser più piccola di due angoli retti.

Sia ABC il triangolo proposto, e sia, se è possibile, la somma dei suoi angoli $=2P-Z$, P indicando un angolo retto, e Z essendo la quantità angolare qualunque, di cui si suppone che la somma degli angoli sia più piccola di due angoli retti. Fig. 35.a

Sia A il più piccolo degli angoli del triangolo ABC; sopra il lato opposto BC fate l'angolo BCD=ABC, e l'angolo CBD=ACB; i triangoli BCD, ABC saranno eguali, perchè hanno un lato eguale BC adiacente a due angoli respettivamente eguali *. Per il punto D tirate una linea retta qualunque EF, che incontri in E, ed F i due lati dell' angolo A prolungati (1). * Pr. 7.

---

(1) Si suppone che l'angolo A è il più piccolo del triangolo ABC, e che in conseguenza è minore o non maggior che due terzi d'angolo retto affine di

Poichè la somma degli angoli di ciascun dei triangoli ABC, BCD è 2P—Z, e quella di ciascun dei triangoli EBD, DCF non può eccedere 2P *, ne segue che la somma degli angoli dei quattro triangoli ABC, BCD, EBD, DCF non eccede 4P—2Z+4P, ovvero 8P—2Z. Se da questa somma si toglie quella degli angoli in B, C, D, che è 6P, poichè la somma degli angoli formati in ciascuno dei punti B, C, D, è 2P, * il resto sarà eguale alla somma degli angoli del triangolo AEF; dunque la somma degli angoli del triangolo AEF non eccede 8P—2Z—6P, ovvero 2P—2Z.

* Pr. 19.

* Pr. 2. Cor. 3.

Così, mentre che bisogna aggiungere Z alla somma degli angoli del triangolo ABC per farne due angoli retti, bisogna aggiungere almeno 2Z alla somma degli angoli del triangolo AEF per farne egualmente due angoli retti.

Mediante il triangolo AEF si costruirà similmente un terzo triangolo, talmentechè bisognerà aggiungere almeno 4Z alla somma dei suoi tre angoli perchè il tutto sia eguale a due angoli retti; e per mezzo del terzo se ne costruirà nella stessa maniera un quarto, dimodochè bisognerà aggiungere almeno 8Z alla somma dei suoi angoli affinchè il tutto

---

render più sensibile la possibilità che una linea retta condotta per il punto D incontri ad un tempo i due lati AB, AC prolungati.

sia eguale a due angoli retti; e così di seguito.

Ora, per quanto piccolo sia Z per rapporto all'angolo retto P, la serie Z, 2 Z, 4Z, ec., i di cui termini crescono in ragion dupla, condurrà ben presto ad un termine eguale a 2P, o più grande di 2P. Si perverrà dunque allora a un triangolo tale, che bisognerebbe aggiungere alla somma dei suoi angoli una quantità eguale o più grande di 2P, acciocchè la somma totale fosse solamente 2P. Questa conseguenza è visibilmente assurda; dunque l'ipotesi, da cui siamo partiti, non può sussistere; e vale a dire è impossibile che la somma degli angoli del triangolo ABC sia più piccola di due angoli retti: essa non può d'altra parte esser più grande in virtù della Proposizione precedente; dunque ella è eguale a due angoli retti.

Corollario I. Due angoli d'un triangolo essendo dati, o solamente la loro somma, si conoscerà il terzo togliendo la somma di questi angoli da due retti.

II. Se due angoli d'un triangolo sono eguali respettivamente ai due angoli d'un altro triangolo, il terzo sarà eguale al terzo, e i triangoli saranno equiangoli tra di loro.

III. In un triangolo non può esservi che un solo angolo retto; poichè, se ve ne fossero due, il terzo angolo diverrebbe nullo. A più forte ragione in un triangolo non può esservi che un solo angolo ottuso.

IV. In un triangolo rettangolo la somma

dei due angoli acuti è eguale ad un retto.

V. In un triangolo equilatero ciascun angolo è uguale al terzo della somma di due angoli retti, o sivvero ai due terzi d' un solo angolo retto; di maniera che l' angolo retto essendo espresso per 1, l' angolo del triangolo equilatero lo sarà per $\frac{2}{3}$.

Fig. 41. *VI.* In qualunque triangolo BAC, se si prolunghi il lato CA verso D, l' angolo esterno BAD sarà eguale alla somma dei due interni opposti B, e C; perchè, aggiungendo da una parte e dall' altra BAC, le due somme sono eguali ciascuna a due angoli retti.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA

La somma di tutti gli angoli interni d' un Poligono è uguale a tante volte due angoli retti quante unità vi sono nel numero dei suoi lati meno due.

Fig. 42. Sia ABCDEF, ec., il Poligono proposto. Se dal vertice d' un medesimo angolo A si conducano a tutti i vertici degli angoli opposti le diagonali AC, AD, AE, ec., è facile di vedere che il Poligono resterà diviso in cinque triangoli, se ha sette lati, in sei triangoli, se avesse otto lati, e in generale in tanti triangoli quanti il Poligono ha lati meno due; perchè questi triangoli possono essere considerati come aventi per vertice comune il punto A, e per basi i differenti lati del Poligono, eccettuati i due che formano l' angolo A. Si vede nel medesimo tempo che la

somma degli angoli di tutti questi triangoli non differisce dalla somma degli angoli del Poligono. Dunque quest' ultima somma è eguale a tante volte due angoli retti quanti sono i triangoli, e vale a dire quante unità vi sono nel numero dei lati del Poligono meno due.

Corollario I. La somma degli angoli d'un quadrilatero è uguale a due angoli retti moltiplicati per 4—2; ciò che fa quattro angoli retti: dunque, se tutti gli angoli del quadrilatero sono eguali, ciascuno di loro sarà un angolo retto. Questo giustifica la definizione diciassettesima ove si è senza prova presupposto che i quattro angoli d'un quadrilatero son retti nel caso sì del rettangolo che del quadrato.

II. La somma degli angoli d'un pentagono è di due angoli retti moltiplicati per 5—2; il che fa 6 angoli retti. Dunque, allorchè un pentagono sia *equiangolo*, e vale a dire quando i suoi angoli sono eguali gli uni agli altri, ciascuno di essi è eguale al quinto di sei angoli retti, ovvero ai $\frac{6}{5}$ d'un angolo retto.

III. La somma degli angoli d'un esagono è di $2\times(6-2)$, ovvero 8 angoli retti. Dunque nell'esagono equiangolo ciascuno degli angoli è il sesto di 8 angoli retti, o sivvero $\frac{4}{3}$ d'un angolo retto. E così di seguito.

Scolio. Se si volesse applicare questa pro- Fig. 43.
posizione a un poligono, che avesse uno, o più angoli *rientranti*, bisognerebbe conside-

rare ciascun angolo *rientrante* come essendo più grande di due angoli retti. Ma, a scanso d'ogni imbarazzo, non considereremo quì ed in appresso se non che i Poligoni, i quali abbiano soli angoli *salienti*, che si posson chiamare ancora *Poligoni convessi*. Ogni Poligono convesso è tale, che una linea retta, condotta come si vorrà, non può mai incontrare il contorno di questo Poligono se non se in due punti.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA

Fig. 36. *Se due linee rette* AC, ED *son perpendicolari a una terza* AE, *queste due linee saranno paralelle, e vale a dire non si potranno incontrare a qualunque distanza che si prolunghino.*

Perchè, se s'incontrassero in un punto O, si averebbero due perpendicolari OA, OE abbassate da un medesimo punto O sopra una
*Pr. 13. medesima linea AE; ciò ch'è impossibile. *

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA

Fig. 36. *Se due linee rette* AC, BD *fanno con una terza* AB *due angoli interni* CAB, ABD, *di cui la somma sia eguale a due angoli retti, le linee* AC, BD *saranno paralelle.*

Se gli angoli CAB, ABD fossero eguali tra loro, sarebbero retti l'uno e l'altro, e si tornerebbe al caso della proposizion precedente. Supponiamo dunque che questi due

angoli sian ineguali; e per il punto A sia abbassata AE perpendicolare a BD. Nel triangolo rettangolo ABE la somma dei due angoli acuti ABE, BAE è uguale ad un angolo retto; * questa somma essendo sottratta da quella dei due angoli ABE, BAC, che, per ipotesi, è uguale a due angoli retti, resterà l'angolo CAE eguale ad un angolo retto; dunque le due linee AC, BD son perpendicolari ad una medesima linea AE; dunque son paralelle *. * Pr. 20. Cor. 4. * Pr. 22.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA

Se due linee rette AF, BD *fanno con una terza* AB *due angoli interni* FAB, ABD, *la di cui somma sia minore, o maggiore di due angoli retti, dico che le due linee* AF, BD, *prolungate sufficientemente, s'incontreranno.* Fig. 36. a

Conducete AC di maniera che la somma degli angoli CAB+ABD sia eguale a due angoli retti; potranno accadere due casi secondo che l'angolo BAF sarà più piccolo, o più grande di BAC, e vale a dire secondo che la somma data FAB+ABD sarà più piccola, o più grande di due angoli retti.

Sia 1.° l'angolo BAF<BAC; conducete per il punto A un' obliqua qualunque AM, che incontri BD in M; l'angolo AMB sarà eguale a MAC, poichè aggiungendo da una parte e dall'altra una medesima grandezza angolare MAB+ABM, le due somme sono eguali ciascuna a due angoli retti. Prendete

adesso MN=AM, e tirate AN; l'angolo AMB, esterno del triangolo MAN, è eguale alla somma dei due interni opposti MAN,
*Pr. 20. ANM; * ma questi sono eguali fra loro, poichè AM=MN; dunque l'angolo AMB, o il suo eguale MAC è doppio di MAN; dunque la linea AN divide in due parti eguali l'angolo CAM, ed incontra la linea BD in un punto N situato alla distanza MN=AM. Segue dalla medesima dimostrazione che, se sopra la linea BD prendasi parimente NP=AN, si avrà il punto P, ove dee terminare la linea retta, che divide in due parti eguali l'angolo CAN'. Si può dunque prender così successivamente la metà, il quarto, l'ottavo, il sedicesimo, ec. dell'angolo CAM, e le linee, che operan queste divisioni, incontreranno la linea BD in dei punti di più in più lontani, ma facili a determinare; imperocchè si avrà successivamente MN=AM, NP=AN, PZ=AP, ec. Si può parimente osservare che ciascuna distanza da un punto qualunque d'intersezione al punto A non è affatto doppia della distanza della intersezione prossima precedente; perchè AN, per esempio, è minore di AM+MN, o del doppio di AM. Si ha similmente AP<2AN, AZ<2AP, e così di seguito. Ma, continuando a suddividere l'angolo CAM di metà in metà si arriverà ben presto ad un angolo CAZ più piccolo che l'angolo dato CAF, e sarà ancor vero che AZ prolungata incontri BD in un punto determinato; dunque, a più forte ragione, la linea

AF, situata dentro dell' angolo BAZ, incontrerà BD; dunque, se i due angoli BAF, ABD, fanno insieme una somma minore di due angoli retti, le linee AF, BD, prolungate sufficientemente, s' incontreranno.

Supponghiamo 2.° che i due angoli FAB, ABD facciano una somma più grande di due angoli retti: se si prolunga FA verso G, e DB verso E, la somma dei quattro angoli FAB, BAG, ABD, ABE sarà eguale a quattro angoli retti; * e se quindi si toglie FAB+ABD più grande di due angoli retti, il resto BAG+ABE sarà più piccolo di due angoli retti; dunque, verificandosi il primo caso, le linee AG, BE, prolungate sufficientemente, debbono tra loro incontrarsi. Fig. 36. b. * Pr. 2.

Corollario. Per un punto dato A non si può condurre che una sola retta paralella alla retta data BD; perchè non vi è che una retta linea sola AC, che renda la somma dei due angoli BAC+ABD eguale a due angoli retti, ed è la paralella dimandata: ogni altra linea retta AF renderebbe la somma dei due angoli BAF+ABD, più piccola, o più grande di due angoli retti; e perciò ella incontrerebbe la retta BD. Fig. 36. a.

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA

Se due linee paralelle AB, CD *sono incontrate da una secante* EF, *la somma de' due angoli interni* AGO, GOC *sarà uguale a due angoli retti*. Fig. 37.

Poichè, se fosse maggiore, o minore, le due linee AB, CD s' incontrerebbero da una parte, o dall' altra, * e non sarebbero paralelle.

*Pr. 24.

Corollario I. Se l' angolo GOC è retto, l' angolo AGO dev' esserlo pure; dunque ogni linea perpendicolare a una delle paralelle è perpendicolare anche all' altra.

Corollario II. Poichè AGO+GOC è uguale a due angoli retti, e che GOD+GOC è pure uguale a due angoli retti, togliendo da una parte e dall' altra GOC, si avrà l' angolo AGO=GOD. Per conseguenza i quattro angoli acuti EGB, AGO, GOD, COF sono uguali fra loro; accade lo stesso de' quattro angoli ottusi AGE, OGB, COG, DOF; e nel tempo medesimo, se si aggiunga uno de' quattro angoli acuti ad uno de' quattro ottusi, la somma farà sempre due angoli retti.

Scolio. Si danno ordinariamente de' nomi particolari a ciascuno di questi angoli paragonati due a due. Abbiamo già chiamato gli angoli AGO, GOC *interni da una medesima parte;* gli angoli BGO, GOD hanno il medesimo nome. Gli angoli AGO, GOD si chiamano *alterni-interni*, o semplicemente *alterni;* e così pure gli angoli BGO, GOC. Gli angoli EGB, GOD si chiamano *interni-esterni;* e finalmente gli angoli EGB, COF prendono il nome di *alterni-esterni*. Si possono dunque riguardare le seguenti proposizioni come già dimostrate.

Gli angoli interni da una medesima par-

te presi insieme equivalgono a due angoli retti.

Gli angoli alterni-interni sono uguali.

Gli angoli interni-esterni sono uguali.

Gli angoli alterni-esterni sono uguali.

Reciprocamente, se gli angoli così denominati sono uguali, si può conchiudere che le linee, alle quali si rapportano, sono paralelle. Sia, per esempio, l'angolo AGO=GOD; poichè GOC+GOD è uguale a due retti, si avrà pure AGO+GOC uguale a due retti; dunque * le linee AG, CO sono paralelle. *P. 23

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA

2 *Due linee* AB, CD *paralelle a una terza* EF *sono paralelle fra loro.* Fig. 38.

Conducete la secante PQR perpendicolare ad EF. Poichè AB è paralella ad EF, PR sarà perpendicolare ad AB *; parimente, poichè CD è paralella ad EF, la secante PR sarà perpendicolare a CD; dunque AB e CD sono perpendicolari alla medesima linea PQ; dunque son paralelle *. *Co. I. Pr. 25. *Pr. 22.

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA

0 *Due paralelle sono per tutto ugualmente distanti.* Fig. 39.

Fra le due paralelle AC, BD conducete, ovunque vorrete, le due perpendicolari AB, CD; dico che queste due perpendicolari sono uguali.

Le linee AB, CD, perpendicolari ad una delle paralelle, sono nel medesimo tempo
*P. 25. perpendicolari all'altra *; e se si conduce EF perpendicolare sul mezzo d'AC, EF sarà pure perpendicolare a BD, talmentechè tutti gli angoli in A, E, C, B, F, D saranno retti. Ciò posto, dico che il quadrilatero AEFB può essere situato esattamente sul quadrilatero CEFD; poichè il lato EF è comune, l'angolo AEF è uguale a FEC, ed il lato EA è uguale ad EC per costruzione; dunque il punto A cadrà in C. Ma l'angolo EAB è uguale ad ECD; dunque AB e CD saranno in una medesima direzione. D'altronde l'angolo EFB=EFD; dunque FB e FD saranno pure nella medesima direzione; dunque i due quadrilateri coincideranno interamente uno coll'altro, e sarà per conseguenza AB=CD.

PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA

Fig. 40. *Se due angoli* BAC, DEF *hanno i lati respettivamente paralelli, e diretti nel medesimo senso, questi due angoli saranno uguali.*

Prolungate, s'è necessario, DE finchè incontri AC in G; l'angolo DEF è uguale a
*P. 25. DGC, perchè EF è paralella a GC *; l'angolo DGC è uguale a BAC, perchè DG è paralella ad AB; dunque l'angolo DEF è uguale a BAC.

Scolio. Si pone in questa Proposizione la restrizione che EF sia diretta nel medesimo senso di AC, ed ED nel medesimo senso d'AB;

perchè, se si prolunga FE verso H, l'angolo DEH avrà i suoi lati paralelli a quelli dell'angolo BAC, ma questi angoli non saranno uguali, perchè EH ed AC sono dirette in senso contrario: in questo caso l'angolo DEH e l'angolo BAC farebbero insieme due angoli retti.

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA

I lati opposti d'un paralellogrammo sono uguali, e così pure gli angoli opposti.

Tirate la diagonale BD; i due triangoli ADB, DBC hanno il lato comune BD; di più, a cagione delle paralelle AD, BC, l'angolo ADB=DBC *, ed a cagione delle paralelle AB, CD l'angolo ABD=BDC. Dunque i due triangoli ABD, DBC sono uguali *; dunque il lato AB opposto all'angolo ADB è uguale al lato DC opposto all'angolo uguale DBC, come pure AD=BC; dunque i lati opposti d'un paralellogrammo sono uguali. Fig. 44. * Pr. 25. * Pr. 7.

In secondo luogo dall'uguaglianza de' medesimi triangoli ne segue che l'angolo A è uguale all'angolo C, e similmente che l'angolo ADC, composto de' due angoli ADB, BDC, è uguale all'angolo ABC, composto de' due angoli DBC, ABD; dunque gli angoli opposti d'un paralellogrammo sono uguali.

Corollario. Dunque due paralelle AB, CD comprese fra due altre paralelle AD, BC sono uguali.

PROPOSIZIONE XXX.

TEOREMA

Fig. 44. *Se in un quadrilatero* ABCD *i lati opposti sono uguali, talmente che sia* AB=CD, *e* AD=BC. *questi lati saranno ancora paralelli, e la figura sarà un paralellogrammo*

Poichè, tirando la diagonale BD, i due triangoli ABD, BDC avranno i tre lati respettivamente uguali; dunque saranno uguali; dunque l'angolo ADB opposto al lato AB è uguale all'angolo DBC opposto al lato CD; * P. 25. dunque * il lato AD è paralello a BC. Per una simil ragione AB è paralello a CD; dunque il quadrilatero ABCD è un paralellogrammo.

PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA

Se due lati opposti AB, CD *d'un quadrilatero sono eguali e paralelli, gli altri due lati saranno parimente eguali e paralelli, e la figura* ABCD *sarà un paralellogrammo.*

Sia tirata la diagonale BD. Poichè AB è paralella a CD, gli angoli alterni ABD, * Pr. 25. BDC, sono eguali *; d'altronde il lato AB=DC, il lato DB è comune; dunque il trian- * Pr. 6. golo ABD è uguale al triangolo DBC *; dunque il lato AD=BC, l'angolo ADB=DBC, e per conseguenza AD è paralella a BC; dunque la figura ABCD è un paralellogrammo.

PROPOSIZIONE XXXII.

TEOREMA

Le due diagonali AC, BD *d'un paralellogrammo si tagliano scambievolmente in due parti eguali nel punto* O *del loro incontro comune.* Fig. 45.

Poichè, paragonando il triangolo ADO al triangolo COB, si trova il lato AD=CB, l'angolo ADO=CBO *, e l'angolo DAO=OCB; dunque questi due triangoli sono eguali *; dunque AO, lato opposto all'angolo ADO, è uguale ad OC, lato opposto all'angolo OBC; dunque ancora DO=OB. * Pr. 25. * Pr. 7.

Scolio. Nel caso del rombo i lati AB, BC essendo eguali, i triangoli AOB, OBC hanno i tre lati respettivamente eguali, e sono per conseguenza eguali; d'onde segue che l'angolo AOB=BOC, e parimente che le due diagonali di un rombo si tagliano scambievolmente ad angoli retti.

LIBRO SECONDO.

IL CIRCOLO

E LA MISURA DEGLI ANGOLI

DEFINIZIONI

Fig. 46. 1. La *circonferenza del circolo* è una linea curva, di cui tutti i punti sono ugualmente distanti da un punto interno, che si chiama *centro*.

Il *circolo* è lo spazio compreso da questa linea curva.

N. B. Talora nel discorso si confonde il circolo colla circonferenza; ma sarà sempre facile di ristabilire l'esattezza delle espressioni ricordandosi che il circolo è una superficie, che ha lunghezza e larghezza, mentre la circonferenza non è che una linea.

2. Ogni linea retta CA, CE, CD ec. condotta dal centro alla circonferenza si chiama *raggio*, o *semi-diametro*. Ogni linea, come AB, che passa per il centro, e ch'è terminata da ambe le parti alla circonferenza, si chiama *diametro*.

In virtù della definizione del circolo tutti i raggi sono uguali; tutti i diametri sono pure uguali, e doppj ciascuno del raggio.

3. Si chiama *arco* una porzione di circonferenza, come FHG.

La *corda* o *sottesa* dell'arco è la linea retta FG, che unisce le sue due estremità.

4. *Segmento* è la superficie o porzione di cerchio compresa fra l'arco e la corda.

N. B. Alla medesima corda FG corrispondono insieme due archi FHG, FEG, e per conseguenza anche due segmenti; ma s'intende sempre di parlar del minore, salvo che non si esprima il contrario.

5. *Settore* è la parte del circolo compresa fra un arco DE, e i due raggi CD, CE condotti alle estremità del medesimo arco.

6. Si chiama *linea iscritta nel circolo* quella, le cui estremità sono alla circonferenza, come AB. Fig. 47.

Angolo iscritto un angolo, come BAC, il di cui vertice è alla circonferenza, e che è formato da due corde:

Triangolo iscritto un triangolo, come BAC, i cui tre angoli hanno i loro vertici alla circonferenza:

Ed in generale *figura iscritta* quella, di cui tutti gli angoli hanno i vertici loro alla circonferenza; nel tempo stesso si dice che il circolo è *circoscritto* a una tal figura.

7. Si chiama *secante* una linea, che incontra la circonferenza in due punti; tale è AB. Fig. 48.

8. *Tangente* è una linea, che non ha che un sol punto comune colla circonferenza; tale è CD. Il punto comune M si chiama *punto di contatto*,

9. Parimente due circonferenze sono *tangenti* l'una dell'altra quando hanno un sol punto comune.

10. Un poligono è *circoscritto ad un circolo* quando tutti i suoi lati sono *tangenti* della circonferenza; nello stesso caso si dice che il circolo è *iscritto* nel poligono.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA

Fig. 49. *Ogni diametro* AB *divide il circolo, e la sua circonferenza in due parti uguali.*

Poichè, se si applica la figura AEB sopra AFB, conservando la base comune AB, bisognerà che la linea curva AEB cada esattamente sulla linea curva AFB; altrimenti vi sarebbero nell'una o nell'altra dei punti disugualmente lontani dal centro; il che è contro la definizione del circolo.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA

Ogni corda è minor del diametro.

Poichè, se alle estremità della corda AD si conducano i raggi AC, CD, si avrà la linea retta AD<AC+CD, o AD<AB.

Corollario. Dunque la maggior linea retta, che si possa iscrivere in un circolo, è uguale al di lui diametro.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA

Una linea retta non può incontrare una circonferenza in più di due punti.

Poichè, se l'incontrasse in tre, questi tre punti sarebbero ugualmente distanti dal centro; vi sarebbero dunque tre linee uguali condotte da uno stesso punto sopra una medesima linea retta; il che è impossibile *. * P. 16 Lib. I.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA

In un medesimo circolo, o in circoli uguali, gli archi uguali sono sottesi da corde uguali, e reciprocamente le corde uguali sottendono archi uguali.

Essendo il raggio AC uguale al raggio EO, Fig. 50.
e l'arco AMD uguale all'arco ENG, dico che la corda AD sarà uguale alla corda EG.

Poichè, essendo il diametro AB uguale al diametro EF, il mezzo-circolo AMDB potrà applicarsi esattamente sul mezzo-circolo ENGF, e la linea curva AMDB coinciderà interamente colla linea curva ENGF. Ma si suppone la parte AMD uguale alla parte ENG; dunque il punto D cadrà sul punto G; dunque la corda AD è uguale alla corda EG.

Reciprocamente, supponendo sempre il raggio AC=EO, se la corda AD=EG, dico che l'arco AMD sarà uguale all'arco ENG.

Poichè, tirando i raggi CD, OG, i due

triangoli ACD, EOG avranno i tre lati respettivamente uguali, cioè AC=EO, CD=OG, e AD=EG; dunque questi triangoli
* 11, 1. sono uguali, * e l'angolo ACD=EOG. Ma ponendo il mezzo-circolo ADB sul suo uguale EGF, poichè l'angolo ACD=EOG, è chiaro che il raggio CD cadrà sul raggio OG, e il punto D sul punto G; dunque l'arco AMD è uguale all'arco ENG.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA

Nel medesimo circolo, o in circoli uguali, un arco maggiore è sotteso da una corda maggiore, e reciprocamente; purchè gli archi, di cui si tratta, siano minori d'una mezza-circonferenza.

Poichè, sia l'arco AH maggiore di AD, e siano condotte le corde AD, AH, ed i raggi CD, CH: i due lati AC, CH del triangolo ACH sono uguali ai due lati AC, CD del triangolo ACD; l'angolo ACH è maggiore di ACD; dunque
* 10, 1. * il terzo lato AH è maggiore del terzo AD; dunque la corda che sottende l'arco maggiore, è la maggiore.

Reciprocamente, se la corda AH vien supposta maggiore d'AD, si conchiuderà dagli stessi triangoli che l'angolo ACH è maggiore d'ACD, e che perciò l'arco AH è maggiore di AD.

Scolio. Noi supponiamo che gli archi, di cui si tratta, siano minori della mezza-circonferenza. Accade il contrario quando sono

maggiori; allora, aumentando l'arco, diminuisce la corda, e reciprocamente. Così essendo l'arco AKBD maggiore di AKBH, la corda AD del primo è minore di AH del secondo.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA

Il raggio GC *perpendicolare ad una corda* AB *divide questa corda, e l'arco sotteso* AGB, *l'uno e l'altra in due parti uguali.* Fig. 51.

Conducete i raggi AC, CB; questi raggi sono, per rapporto alla perpendicolare CD, due oblique uguali; dunque si allontanano ugualmente dalla perpendicolare *; dunque AD=DB. * 16, 1.

In secondo luogo, poichè AD=DB, CG è una perpendicolare inalzata sul mezzo d'AB; dunque * ogni punto di questa perpendicolare dev'essere ugualmente distante dalle due estremità A e B. Il punto G è uno di questi punti; dunque la distanza AG=GB. Ma se la corda AG è uguale alla corda GB, l'arco AG sarà uguale all'arco GB *; dunque il raggio CG perpendicolare alla corda AB divide l'arco sotteso da questa corda in due parti uguali nel punto G. * 17, 1. * Pr. 4.

Scolio. Il centro C, il mezzo D della corda AB, e il mezzo G dell'arco sotteso da questa corda sono tre punti situati sopra una medesima linea retta perpendicolare alla corda. Ora bastan due punti per determinare la posizione d'una linea retta; dunque ogni

linea, che passa per due dei punti mentovati, passerà necessariamente per il terzo, e sarà perpendicolare alla corda.

Ne segue pure che *la perpendicolare inalzata sul mezzo d' una corda passa per il centro, e per il mezzo dell' arco sotteso dalla stessa corda.*

Poichè questa perpendicolare si confonde con quella, che sarebbe abbassata dal centro sulla medesima corda, giacchè passano ambedue per il mezzo della corda suddetta.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA

Fig. 52. *Per tre punti dati* A, B, C, *non situati in linea retta, si può sempre far passare una circonferenza di circolo; ma non se ne può far passar che una sola.*

Tirate AB, BC, e dividete queste due linee in due parti uguali colle perpendicolari DE, FG; dico primieramente che queste perpendicolari s' incontreranno in un punto O.

Poichè le linee DE, FG si taglieranno necessariamente, se non son paralelle. Or supponiamo che fossero paralelle, la linea BD perpendicolare a DE sarebbe, perpendicolare a FG *, e l' angolo in K sarebbe retto; ma BK, prolungamento di BD, è differente da BF, poichè i tre punti A, B, C non sono in linea retta; dunque vi sarebbero due perpendicolari BF, BK abbassate da uno stesso punto sulla medesima linea, il che è impossibile *; dunque le perpendicolari DE, FG si taglieranno sempre in un punto O.

* 28, 1.

* 13. 1.

Adesso il punto O, come appartenente alla perpendicolare DE, è ad uguale distanza dai due punti A e B *; il medesimo punto O, come appartenente alla perpendicolare FG, è ad ugual distanza da' due punti B, C; dunque le tre distanze OA, OB, OC sono uguali; dunque la circonferenza descritta col centro O, e col raggio OB passerà per i tre punti dati A, B, C. * 17, 1.

Resta così provato che si può sempre far passare una circonferenza per tre punti dati non in linea retta; dico di più che non si può farvene passar che una sola.

Poichè, se vi fosse una seconda circonferenza, che passasse per i tre punti dati A, B, C, il suo centro non potrebbe esser fuori della linea DE *, poichè allora sarebbe disugualmente lontano da A e da B; non potrebbe esser fuori della linea FG per una simil ragione; dunque sarebbe nel tempo stesso sulle due linee DE, FG. Or due linee rette non possono tagliarsi in più d'un punto; dunque non v'è che una sola circonferenza, che possa passare per tre punti dati. * 17, 1.

Corollario. Due circonferenze non possono incontrarsi in più di due punti; poichè, se avessero tre punti comuni, avrebbero il medesimo centro, e non farebbero che una sola e medesima circonferenza.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA

Due corde uguali sono ugualmente lont-

ne dal centro, e di due corde disuguali la minore è la più distante dal centro.

Fig. 53. 1.° Sia la corda AB=DE: dividete queste corde in due parti eguali colle perpendicolari CF, CG, e tirate i raggi CA, CD.

I triangoli rettangoli CAF, CDG hanno le ipotenuse CA, CD uguali; di più il lato AF, metà di AB, è uguale al lato DG, metà di DE; dunque questi triangoli sono
* 18, 1. uguali *, ed il terzo lato CF è perciò uguale al terzo CG; dunque 1.° le due corde uguali AB, DE sono ugualmente lontane dal centro.

2.° Sia la corda AH maggiore di DE, l'ar-
* Pr. 5. co AKH sarà maggiore dell'arco DME *; sull'arco AKH prendete la parte ANB= DME; tirate la corda AB, ed abbassate CF perpendicolare su questa corda, e CI perpendicolare sopra AH; è chiaro che CF è mag-
* 16, 1. giore di CO, e CO maggiore di CI *; dunque a più forte ragione CF>CI. Ma CF=CG, poichè le corde AB, DE sono uguali; dunque si ha CG>CI; dunque la minore di due corde disuguali è la più lontana dal centro.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA

Fig. 54. *La perpendicolare* BD *condotta all'estremità del raggio* CA *è una tangente della circonferenza.*

Poichè ogni obliqua CE è maggiore della
* 16, 1. perpendicolare CA; * dunque il punto E è fuori del circolo; dunque la linea BD ha il solo punto A comune colla circonferenza, e
Def. 8. per conseguenza BD è una sua tangente. *

Scolio. Non si può condurre da un punto dato A se non che una sola tangente AD alla circonferenza; poichè, mentre se ne potesse condurre un'altra, questa non sarebbe più perpendicolare al raggio CA; dunque, per rapporto a questa nuova tangente, il raggio CA sarebbe un'obliqua, e la perpendicolare abbassata dal centro su questa tangente sarebbe minore di CA; dunque questa pretesa tangente entrerebbe dentro del circolo, e sarebbe perciò una secante.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

Due paralelle AB, DE *intercettano sulla circonferenza archi uguali* MN, PQ. Fig. 55.

Possono accadere tre casi.

1.° Se le due paralelle sono secanti, conducete il raggio CH perpendicolare alla corda MP, sarà nel medesimo tempo perpendicolare alla sua paralella NQ *; dunque il punto H sarà ad un tempo stesso il mezzo dell'arco MHP, e quello dell'arco NHQ *; si avrà dunque l'arco MH=HP, e l'arco NH=HA; e di qui resulta MH—NH=HP—HQ, cioè MN=PQ. * 25, 1. * 6.

2.° Se di due paralelle AB, DE una è secante, l'altra tangente, conducete il raggio CH al punto del contatto H; questo raggio sarà perpendicolare alla tangente DE *, ed alla sua paralella MP. Ma, poichè CH è perpendicolare alla corda MP, il punto H è il mezzo dell'arco MHP; dunque gli ar- * 9.

chi MH, HP compresi tra le paralelle AB, DE sono uguali.

3.° Finalmente, se le due paralelle DE, IL sono tàngenti, una in H, l'altra in K, conducete la secante paralella AB, ed avrete, per quello che abbiam dimostrato, MH=HP, MK=KP; dunque l'arco intero HMK=HPK; e si vede inoltre che ciascuno di questi archi è una mezza circonferenza.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA

Se due circonferenze si tagliano in due punti, la linea retta, che passa per i lor centri, sarà perpendicolare alla corda, che unisce i punti d'intersezione, e la dividerà in due parti uguali.

Fig. 57. e 58. Poichè la linea AB, che unisce i punti d'intersezione, è una corda comune ai due circoli. Or, se sul mezzo di questa corda si alza una perpendicolare, essa dee passare per ciascun de' due centri C e D *. Ma per due punti dati non può passare che una sola linea retta; dunque la linea retta condotta per i centri sarà perpendicolare sul mezzo della corda comune.

* 6.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA

Se la distanza de' due centri è minore della somma de' raggi, e se nel tempo stesso il maggior raggio è minor del più piccolo aggiunto alla distanza dei centri, i due circoli si taglieranno.

Poichè all'effetto che abbia luogo l'intersezione, bisogna che il triangolo CAD sia possibile. Bisogna dunque non solamente che CD sia $<$ AC+AD, ma che anche il maggior raggio AD sia $<$ AC+CD. Or, tutte le volte che il triangolo CAD sarà possibile, è chiaro che le circonferenze descritte coi centri C e D si taglieranno in A e B. Fig. 57. e 58. Fig. 57. Fig. 58.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA

Se la distanza CD *de' centri de' due circoli è uguale alla somma dei loro raggi* CA, AD, *questi due circoli si toccheranno esternamente.* Fig. 59

È chiaro che avranno il punto A comune; ma avranno questo sol punto; poichè, per aver due punti comuni, bisognerebbe che la distanza dei centri fosse minore della somma de' raggi.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA

Se la distanza CD *dei centri di due circoli è uguale alla differenza dei loro raggi* CA, AD, *questi due circoli si toccheranno internamente.* Fig. 60.

In primo luogo è chiaro che hanno il punto A comune: non ne possono avere alcun' altro; poichè, all'effetto che ciò accadesse, bisognerebbe che il maggior raggio AD fosse minore dell'altro raggio AC unito alla distanza dei centri CD *, il che non ha luogo. * 12.

Coroilario. Dunque, se due circoli si toc-

cano, o internamente, o esternamente, i centri, ed il punto del contatto sono sulla medesima linea retta.

Scolio. Tutti i circoli, che hanno il loro centro sulla retta CD, e che passano per il punto A, sono tangenti gli uni degli altri; cioè non hanno fra loro che il solo punto A di comune. E se per il punto A si conduca AE perpendicolare a CD, la retta AE sarà una tangente comune a tutti questi circoli.

Fig. 59 e 60.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA

Fig. 61. *Nel medesimo circolo, o in circoli uguali, gli angoli uguali* ACB, DCE, *il cui vertice è al centro, intercettano sulla circonferenza archi uguali* AB, DE.

Reciprocamente, se gli archi AB, DE *sono uguali, gli angoli* ACB, DCE *saranno pure uguali.*

Poichè 1.° se l'angolo ACB è uguale all'angolo DCE, questi due angoli potranno situarsi l'uno sull'altro; e siccome i loro lati sono uguali, è chiaro che il punto A cadrà in D, e il punto B in E. Ma allora l'arco AB dee pur cadere sull'arco DE; poichè, se i due archi non fossero confusi in un solo, vi sarebbero nell'uno o nell'altro dei punti disugualmente lontani dal centro; il che è impossibile: dunque l'arco AB=DE.

2.° Se si suppone AB=DE, dico che l'angolo ACB sarà uguale all'angolo DCE. Poichè, se questi angoli non sono uguali, sia ACB il maggiore, e sia preso ACI=DCE;

si avrà, per ciò che si è dimostrato, AI=DE: ma per supposizione l'arco AB=DE; dunque si avrebbe AI=AB, o la parte uguale al tutto; il che è impossibile; dunque l'angolo ACB=DCE.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA

Nel medesimo circolo, o in due circoli uguali, se due angoli al centro ACB, DCE *stanno fra loro come due numeri interi, gli archi intercetti* AB, DE *staranno fra loro come i medesimi numeri, e si avrà questa proporzione* Fig. 62.

Angolo ACB : angolo DCE :: arco AB : arco DE.

Supponiamo, per esempio, che gli angoli ACB, DCE stiano fra loro come 7 stà a 4, o, il che torna lo stesso, supponiamo che l'angolo M, che servirà di misura comune, sia contenuto sette volte nell'angolo ACB, e quattro nell'angolo DCE. Gli angoli parziali ACm, mCn, nCp, ec., DCx, xCy, ec. essendo uguali fra loro, gli archi parziali Am, mn. np, ec. Dx, xy, ec. saranno pure fra loro uguali; * dunque l'arco intero AB * 15. starà all'arco intero DE come 7 stà a 4. Ora è manifesto che lo stesso ragionamento avrebbe sempre luogo quando in vece di 7 e 4 si avessero altri numeri qualunque; dunque, se il rapporto degli angoli ACB, DCE può essere espresso in numeri interi, gli archi AB, DE staranno fra loro come gli angoli ACB, DCE.

Scolio. Reciprocamente, se gli archi AB DE stessero fra loro come due numeri interi, gli angoli ACB, DCE starebbero fra loro come i medesimi numeri, e si avrebbe sempre ACB : DCE :: AB : DE; perchè gli archi parziali Am, mn, ec., Dx, xy, ec. essendo eguali, gli angoli parziali ACm, mCn, ec., DCx, xCy, ec. son pure eguali.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA

Fig. 63. *Qualunque sia il rapporto de' due angoli* ACB, ACD, *questi due angoli staranno sempre fra loro come i due archi* AB, AD *intercetti fra i loro lati, e descritti dai loro vertici come centri con raggi uguali.*

Supponiamo l'angolo minore situato dentro il maggiore; se non è vera la proporzione enunziata, l'angolo ACB starà all'angolo ACD come l'arco AB stà a un arco maggiore, o minore di AD. Supponiamo quest'arco maggiore, e rappresentiamolo con AO; avremo perciò

Ang. ACB : ang. ACD :: arc. AB : arc. AO.

Imaginiamo adesso che l'arco AB sia diviso in parti uguali, di cui ciascuna sia minor di DO; vi sarà almeno un punto di divisione fra D e O; sia I questo punto, e tiriamo CI; gli archi AB, AI staranno fra loro come due numeri interi, e si avrà per il teorema precedente

Ang. ACB : ang. ACI :: arc. AB : arc. AI.

Confrontando queste due proporzioni una coll'altra, e osservando che gli antecedenti sono i medesimi, se ne conchiuderà che i conseguenti sono proporzionali, e che perciò

Ang. ACD : ang. ACI :: arc. AO : arc. AI.

Ma l'arco AO è maggiore dell'arco AI; bisognerebbe dunque, perchè sussistesse la proporzione, che l'angolo ACD fosse maggiore dell'angolo ACI: ora al contrario è minore; dunque è impossibile che l'angolo ACB stia all'angolo ACD come l'arco AB stà ad un arco maggiore di AD.

Si dimostrerebbe con un ragionamento affatto simile che il quarto termine della proporzione non può esser minore di AD; dunque esso è esattamente AD, e si ha la proporzione

Ang. ACB : ang. ACD :: arc. AB : arc. AD.

Corollario. Poichè l'angolo al centro del circolo, e l'arco intercetto fra i suoi lati hanno un tal legame, che quando l'uno aumenta, o diminuisce in un rapporto qualunque, l'altro aumenta, o diminuisce nel medesimo rapporto, si può stabilire una di queste grandezze per misura dell'altra. Onde noi prenderemo da quì innanzi l'arco AB per misura dell'angolo ACB. Bisogna solamente osservare, nel paragonar gli angoli fra di loro, che gli archi, che servono lor di misura, deggiono esser descritti con raggi uguali; poichè ciò vien supposto in tutte le precedenti proposizioni.

Scolio I. Pare più naturale il misurar una quantità con una quantità della medesima specie; e dietro di questo principio converrebbe riportar tutti gli angoli all'angolo retto; così, essendo l'angolo retto l'unità di misura, un angolo acuto sarebbe espresso da un numero compreso fra 0 e 1, ed un angolo ottuso da un numero fra 1 e 2. Ma questa maniera d'esprimere gli angoli non sarebbe la più comoda per l'uso; è stato trovato molto più semplice il misurarli con archi di circolo, a motivo della facilità di fare degli archi uguali ad archi dati, e per molte altre ragioni. Del rimanente, se la misura degli angoli per mezzo degli archi di circolo è in qualche modo indiretta, è ugualmente facile l'ottenere col loro mezzo la misura diretta, e assoluta. Poichè, se paragonate l'arco, che serve di misura ad un angolo, colla quarta parte della circonferenza, avrete il rapporto dell'angolo dato all'angolo retto, che è la misura assoluta.

Scolio II. Tutto ciò, che è stato dimostrato nelle tre proposizioni precedenti per la comparazione degli angoli cogli archi, ha luogo ugualmente per la comparazione dei settori cogli archi; poichè i settori sono uguali quando lo sono gli angoli, e in generale sono proporzionali agli angoli; dunque *due settori* ACB, ACD *presi nel medesimo circolo, o in circoli uguali, stanno fra loro come gli archi* AB, AD *basi di questi stessi settori.*

Si vede da ciò che gli archi di circolo,

che servono di misura agli angoli, possono parimente servire di misura ai settori d'un medesimo circolo, o di circoli uguali.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA

L'angolo iscritto BAD *ha per misura la metà dell'arco* BD *compreso fra i suoi lati.* Fig. 64. e 65.

Supponiamo in primo luogo che il centro del circolo sia situato dentro l'angolo BAD; si condurranno il diametro AE, ed i raggi CB, CD. L'angolo BCE, esterno rispetto al triangolo ABC, è uguale alla somma dei due interni CAB, ABC *: ma essendo il triangolo BAC isoscele, l'angolo CAB=ABC; dunque l'angolo BCE è doppio di BAC. L'angolo BCE, come angolo al centro, ha per misura l'arco BE; dunque l'angolo BAC avrà per misura la metà di BE. Per una simil ragione l'angolo CAD avrà per misura la metà di ED; dunque BAC+CAD, o BAD avrà per misura la metà di BE+ED, o la metà di BD. Fig. 64. * 20, 1.

Supponiamo in secondo luogo che il centro C sia situato fuori dell'angolo BAD; allora, conducendo il diametro AE, l'angolo BAE avrà per misura la metà di BE, l'angolo DAE la metà di DE; dunque la lor differenza BAD avrà per misura la metà di BE meno la metà di ED, o la metà di BD. Fig. 65.

Dunque ogni angolo iscritto ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati.

Corollario I. Tutti gli angoli BAC, BDC ec. iscritti nel medesimo segmento di Circolo Fig. 66.

sono uguali, perchè hanno per misura la metà dell'istess' arco BOC.

Fig. 67. *Corollario II.* Ogni angolo BAD iscritto nel mezzo-circolo è un angolo retto, poichè ha per misura la metà della mezza-circonferenza BOD, o la quarta parte della circonferenza.

Per dimostrare la stessa cosa in altra maniera, tirate il raggio AC; il triangolo BAC è isoscele, onde l'angolo BAC=ABC; il triangolo CAD è parimente isoscele, e l'angolo CAD=ADC; dunque BAC+CAD, o BAD=ABD+ADB: ma, se i due angoli B, e D del triangolo ABD equivalgono insieme al terzo BAD, i tre angoli del triangolo equivarranno a due volte l'angolo BAD; essi equivalgono d'altronde a due angoli retti; dunque l'angolo BAD è un angolo retto.

Fig. 66. *Corollario III.* Ogni angolo BAC iscritto in un segmento maggiore del mezzo-circolo è un angolo acuto, poichè ha per misura la metà dell'arco BOC minore d'una mezza-circonferenza.

Ed ogni angolo BOC iscritto in un segmento minore del mezzo-circolo è un angolo ottuso, poichè ha per misura la metà dell'arco BAC maggiore d'una mezza-circonferenza.

Fig. 68. *Corollario IV.* Gli angoli opposti A, e C d'un quadrilatero iscritto ABCD equivalgono insieme a due angoli retti; poichè l'angolo BAD ha per misura la metà dell'arco BCD, l'angolo BCD ha per misura la metà dell'arco BAD; dunque i due angoli BAD, BCD presi insieme hanno per misura la metà

della circonferenza; il che equivale a due angoli retti.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA

L'angolo BAC *formato da una tangente, e da una corda o secante ha per misura la metà dell'arco* AMDC *compreso fra i suoi lati.* Fig. 69.

Al punto di contatto A conducete il diametro AD; l'angolo BAD è retto *, ed ha per misura la metà della mezza circonferenza AMD; l'angolo DAC ha per misura la metà di DC; dunque BAD+DAC, o BAC ha per misura la metà di AMD più la metà di DC, o la metà dell'arco intero AMDC. * 9.

Si dimostrerebbe medesimamente che l'angolo CAE ha per misura la metà dell'arco AC compreso fra i suoi lati.

PROBLEMI RELATIVI AI DUE PRIMI LIBRI

PROBLEMA I.

Dividere la retta data AB *in due parti uguali.* Fig. 70.

Da' punti A, e B, come centri, e con uno stesso raggio maggiore della metà d'AB, descrivete due archi, che si taglino in D: il punto D sarà ugualmente lontano dai punti A e B. Segnate nella stessa maniera al di sopra, o al di sotto della linea AB un secondo punto E ugualmente lontano dai punti A e B. Per i due punti D, E tirate la linea DE; dico che DE taglierà la linea AB in due parti uguali nel punto C.

Poichè, essendo ciascuno de' punti D, e E ugualmente distante dalle estremità A, e B, essi debbono trovarsi ambedue nella perpendicolare inalzata sul mezzo d'AB. Ma per due punti dati non può passare se non che una sola linea retta; dunque la linea DE sarà quella stessa perpendicolare, che taglia la linea AB in due parti uguali al punto C.

PROBLEMA II.

Fig. 71. *Da un punto* A *dato sulla linea* BC *alzare una perpendicolare a questa linea.*

Prendete i punti B, e C ad ugual distanza da A; indi dai punti B, e C, come centri, e con uno stesso raggio maggior di BA, descrivete due archi, che si taglino in D; tirate AD, che sarà la perpendicolare richiesta.

Poichè, essendo il punto D ugualmente lontano da B, e da C, esso appartiene alla perpendicolare alzata sul mezzo di BC; dunque AD è questa perpendicolare.

Scolio. La medesima costruzione serve a fare un angolo retto BAD in un punto dato A sopra una linea data BC.

PROBLEMA III.

Fig. 72. *Da un punto* A *dato fuori della retta* BD *abbassare una perpendicolare sopra questa retta.*

Dal punto A, come centro, e con un raggio abbastanza grande, descrivete un arco, che tagli la linea BD nei due punti B, e D. Segnate quindi un punto E ugualmente distante dai punti B, e D, e tirate AE, che sarà la perpendicolare cercata.

Poichè ciascuno dei due punti A, ed E è ugualmente distante dai punti B, e D; dunque la linea AE è perpendicolare sul mezzo di BD.

PROBLEMA IV.

Al punto A *della linea* AB *fare un angolo uguale all'angolo dato* K. Fig. 73.

Dal vertice K, come centro, e con un raggio ad arbitrio, descrivete l'arco IL terminato a' due lati dell'angolo. Dal punto A, come centro, e con un raggio AB uguale a KI, descrivete l'arco indefinito BO. Prendete poi un raggio uguale alla corda LI; dal punto B, come centro, e con questo raggio descrivete un arco, che tagli in D l'arco indefinito BO; tirate AD; e l'angolo DAB sarà uguale all'angolo dato K.

Poichè i due archi BD, LI hanno raggi uguali, e corde uguali; dunque sono uguali *; dunque l'angolo BAD=IKL. * 4, 2.

PROBLEMA V.

Dividere un angolo, o un arco dato in due parti uguali. Fig. 74.

1.° Se bisogna dividere l'arco AB in due parti uguali, dai puntì A, e B, come centri, e con uno stesso raggio descrivete due archi, che si taglino in D. Per il punto D, e per il centro C tirate CD, che taglierà l'arco AB in due parti uguali nel punto E.

Poichè ciascuno dei punti C, e D è ugualmente distante dalle estremità A, e B della corda AB; dunque la linea CD è perpendi-

colare sul mezzo di questa corda; dunque divide l'arco AB in due parti uguali nel punto E *.

* 6, 2.

2.° Se bisogna dividere in due parti uguali l'angolo ACB, si comincerà da descrivere dal vertice C, come centro, l'arco AB, e si procederà nel resto come quì sopra. È chiaro che la linea CD dividerà in due parti ugali l'angolo ACB.

Scolio. Si può colla medesima costruzione dividere ciascuna delle metà AE, EB in due parti uguali; così con delle suddivisioni successive si dividerà un angolo, o un arco dato in quattro parti uguali, in otto, in sedici, ec.

PROBLEMA VI.

Fig. 75. *Per un punto dato* A *condurre una paralella alla linea retta data* BC.

Dal punto A, come centro, e con un raggio abbastanza grande, descrivete l'arco indefinito EO; dal punto E, come centro, e col medesimo raggio descrivete l'arco AF; prendete ED=AF, e tirate AD, che sarà la paralella richiesta.

Poichè, conducendo AE, si vede che gli angoli alterni AEF, EAD sono uguali; dunque le linee AD, EF son paralelle *.

* 25, 1.

PROBLEMA VII.

Essendo dati due angoli A, *e* B *d'un triangolo trovare il terzo*.

Fig. 76. Tirate la linea indefinita DEF; fate al punto E l'angolo DEG=A, e l'angolo GEH=B; l'angolo restante HEF sarà il terzo angolo

richiesto; poichè questi tre angoli presi insieme equivalgono a due angoli retti.

PROBLEMA VIII.

Essendo dati due lati B, *e* C *d'un triangolo, e l'angolo* A, *che essi comprendono, descrivere il triangolo.* Fig. 77.

Avendo tirata la linea indefinita DE, fate al punto D l'angolo EDF uguale all'angolo dato A; prendete quindi DG=B, DH=C, e tirate GH; DGH sarà il triangolo cercato.

PROBLEMA IX.

Essendo dati un lato, e due angoli d'un triangolo descrivere il triangolo.

I due angoli dati saranno o tutti due adjacenti al lato dato, o uno adjacente, e l'altro opposto. In questo ultimo caso cercate il terzo *, ed avrete così i due angoli adjacenti. * Pr. 7. Posto ciò, tirate la retta DE uguale al lato dato; fate al punto D l'angolo EDF uguale ad uno degli angoli adjacenti, e al punto E l'angolo DEG uguale all'altro; le due linee DF, EG si taglieranno in H; e DEH sarà il triangolo richiesto. Fig. 78.

PROBLEMA X.

Essendo dati i tre lati A, B, C *d'un triangolo descrivere il triangolo.* Fig. 79.

Tirate DE uguale al lato A; dal punto E, come centro, e con un raggio uguale al secondo lato B descrivete un arco; dal punto D, come centro, e con un raggio uguale al terzo lato C descrivete un altr' arco, che

tagli il primo in F; tirate DF, EF, e DEF sarà il triangolo cercato.

Scolio. Se uno dei lati fosse maggiore della somma degli altri due, gli archi non si taglierebbero; ma la soluzione sarà sempre possibile se la somma dei due lati, presi come si vorrà, sia più grande del terzo.

PROBLEMA XI.

Fig. 80. *Essendo dati due lati* A, *e* B *d'un triangolo, coll'angolo* C *opposto al lato* B, *descrivere il triangolo.*

Vi sono due casi: 1.° se l'angolo C è retto, od ottuso, fate l'angolo EDF uguale all'angolo C; prendete DE=A; dal punto E, come centro, e con un raggio uguale al lato dato B descrivete un arco, che tagli in F la linea DF; tirate EF; e DEF sarà il triangolo richiesto.

Bisogna in questo primo caso che il lato B sia maggiore di A; poichè, l'angolo C essendo retto, od ottuso, è il maggiore degli angoli del triangolo; dunque il lato opposto dev'esser pure il maggiore.

Fig. 81. 2.° Se l'angolo C è acuto, e B maggiore di A, ha sempre luogo la medesima costruzione, e DEF è il triangolo cercato.

Fig. 82. Ma se, essendo acuto l'angolo C, il lato B è minore di A, allora l'arco descritto col centro in E, e col raggio EF=B taglierà il lato DF in due punti F e G situati dalla medesima parte per rapporto a D; dunque vi saranno due triangoli DEF, DEG, che soddisfaranno ugualmente al problema.

Scolio. Il problema sarebbe impossibile in tutti i casi se il lato B fosse minore della perpendicolare abbassata da E sulla linea DF.

PROBLEMA XII.

Essendo dati i lati adjacenti A, *e* B *d'un paralellogrammo coll'angolo* C *da essi compreso, descrivere il paralellogrammo.* Fig. 83.

Tirate la linea DE=A; fate al punto D l'angolo FDE=C; prendete DF=B; descrivete due archi, uno dal punto F, come centro, e con un raggio FG=DE, l'altro dal punto E, come centro, e con un raggio EG=DF; al punto G, ove questi due archi si tagliano, tirate FG, EG; e DEFG sarà il paralellogrammo richiesto.

Poichè, per costruzione, i lati opposti sono uguali; dunque la figura descritta è un paralellogrammo *; e questo paralellogrammo è formato coi lati dati, e l'angolo dato. * 29, 1.

Corollario. Se l'angolo dato è retto, la figura sarà un rettangolo; se inoltre i lati sono uguali, sarà un quadrato.

PROBLEMA XIII.

Trovare il centro d'un circolo, o d'un suo arco dato.

Prendete a piacere nella circonferenza, o nell'arco tre punti A, B, C; tirate, o imaginate che si tirino le rette AB, e BC; dividete queste due linee in due parti uguali per mezzo delle perpendicolari DE, FG; il punto O, ove queste perpendicolari s'incontrano, sarà il centro cercato. Fig. 84.

Scolio. La medesima costruzione serve per far passare una circonferenza di circolo per i tre punti dati A, B, C, e parimente a far sì che il triangolo dato ABC sia iscritto in un circolo.

PROBLEMA XIV.

Per un punto dato condurre una tangente ad un circolo dato.

Fig. 85. Se il punto dato A è sulla circonferenza, tirate il raggio CA, e conducete AD perpendicolare a CA; AD sarà la tangente ri-
* 9, 2. chiesta *.

Fig. 84. Se il punto A è fuori del circolo, unite il punto A, ed il centro colla linea retta CA; dividete CA in due parti uguali nel punto O; dal punto O, come centro, e col raggio OC descrivete una circonferenza, che taglierà la circonferenza data nel punto B; tirate AB; ed AB sarà la tangente cercata.

Poichè, tirando CB, l'angolo CBA iscritto
* 18,2. nel mezzo-circolo è un angolo retto *; dunque AB è perpendicolare all'estremità del raggio CB; dunque è tangente.

Scolio. Essendo il punto A fuori del circolo, si vede che vi son sempre due tangenti uguali AB, AD, che passano per il punto A; esse sono uguali, perchè i triangoli rettangoli CBA, CDA hanno l'ipote-
* 18,1. nusa CA comune, ed il lato CB=CD *; dunque AD=AB, e nel tempo stesso l'angolo CAD=CAB.

PROBLEMA XV.

Iscrivere un circolo in un triangolo dato ABC. Fig. 87.

Dividete gli angoli A, e B in due parti uguali colle rette AO, e BO, che s'incontreranno in O; dal punto O abbassate le perpendicolari OD, OE, OF sui tre lati del triangolo: dico che queste perpendicolari saranno uguali fra loro; poichè, per costruzione, l'angolo DAO=OAF, l'angolo retto ADO=AFO; dunque il terzo angolo AOD è uguale al terzo AOF. D'altronde il lato AO è comune ai due triangoli AOD, AOF, e gli angoli adiacenti al lato uguale sono uguali; dunque questi due triangoli sono uguali; dunque DO=OF. Si proverà parimente che i due triangoli BOD, BOE sono uguali; dunque OD=OE; dunque le tre perpendicolari OD, OE, OF sono uguali fra loro.

Adesso, se dal punto O, come centro, e col raggio OD si descriva una circonferenza, è chiaro che questa sarà iscritta nel triangolo ABC; poichè il lato AB, perpendicolare all'estremità del raggio OD, è una tangente; ed è lo stesso dei lati BC, AC.

Scolio. Le tre linee rette, che dividono in due parti eguali i tre angoli d'un triangolo, concorrono in un medesimo punto.

PROBLEMA XVI.

Sopra una linea retta AB *descrivere un* Fig. 8 8 e 89

segmento capace *dell'angolo dato* C, *cioè un segmento tale che tutti gli angoli, che vi posson essere iscritti, siano uguali all'angolo dato* C.

Prolungate AB verso D; fate al punto B l'angolo DBE=C; tirate BO perpendicolare a BE, e GO perpendicolare sul mezzo d'AB; dal punto d'incontro O, come centro, e col raggio OB descrivete un circolo; il segmento richiesto sarà AMB.

Poichè, siccome BF è perpendicolare all' estremità del raggio OB, dessa è una tangente, e l'angolo ABF ha per misura la metà
* 19, 2. dell'arco AKB *; d'altronde l'angolo AMB, come angolo iscritto, ha pur per misura la metà dell' arco AKB; dunque l' angolo AMB=ABF=EBD=C; dunque tutti gli angoli iscritti nel segmento AMB sono uguali all' angolo dato C.

Scolio. Se l'angolo dato fosse retto, il segmento cercato sarebbe il mezzo-circolo descritto sul diametro AB.

PROBLEMA XVII.

Fig. 90. *Trovare il rapporto numerico di due linee rette date* AB, CD, *seppure queste due linee hanno fra loro una misura comune*.

Portate la minore CD sulla maggiore AB quante volte può esservi contenuta, per esempio, due volte, e col resto BE.

Portate il resto BE sulla linea CD quante volte può esservi contenuto, una volta, per esempio, e col resto DF.

Portate il secondo resto DF sul primo BE quante volte può esservi contenuto, una volta, per esempio, e col resto BG.

Portate il terzo resto BG sul secondo DF quante volte può esservi contenuto.

Continuate così finchè abbiate un resto, che sia contenuto un numero esatto di volte nel suo precedente.

Allora quest' ultimo resto sarà la comune misura delle linee proposte, e riguardandolo come l' unità, si troveranno facilmente i valori dei resti precedenti, e finalmente i valori delle due linee proposte, donde si conchiuderà il loro rapporto in numeri.

Per esempio, se si trova che GB è contenuto due volte appunto in FD, BG sarà la comun misura delle due linee proposte. Sia BG=1, si avrà FD=2; ma EB contiene una volta FD più GB; dunque EB=3; CD contiene una volta EB più FD; dunque CD=5; finalmente AB contiene due volte CD più EB; dunque AB=13; dunque il rapporto delle due linee AB, CD è quello di 13 a 5. Se la linea CD fosse presa per unità, la linea AB sarebbe $\frac{13}{5}$; e se la linea AB fosse presa per unità, la linea CD sarebbe $\frac{5}{13}$.

Scolio. Il metodo, che si è spiegato, è quel medesimo, che prescrive l'Aritmetica per trovare il comun divisore di due numeri; laonde non ha bisogno d'altra dimostrazione.

Può accadere che, per quanto si continui

lungamente l'operazione, non si trovi mai un resto, che sia contenuto un numero preciso di volte nel suo precedente. Allora le due linee non hanno misura comune, e si chiamano *incommensurabili:* se ne vedrà in seguito un esempio nel rapporto, che vi è fra la diagonale, ed il lato d'un quadrato. Non si può dunque allora trovare il rapporto esatto in numeri; ma, trascurando l'ultimo resto, si troverà un rapporto prossimo, e tanto più prossimo quanto più lungi sarà stata portata l'operazione.

PROBLEMA XVIII.

Fig. 91. *Essendo dati due angoli* A, *e* B, *trovare la loro misura comune, se l'abbiano, e quindi il loro rapporto in numeri.*

Descrivete con raggi uguali gli archi CD, EF, che servono di misura a questi angoli; procedete, in seguito, per la comparazione degli archi CD, EF, come nel problema precedente, poichè, un arco può portarsi sopra un arco dello stesso raggio, come una linea retta sopra una linea retta. Giungerete così alla misura comune degli archi CD, EF, se l'abbiano, ed al loro rapporto in numeri. Questo rapporto sarà lo stesso di
* 17, 2. quello degli angoli dati *; e se DO è la misura comune degli archi, DAO sarà quella degli angoli.

Scolio. Si può così trovare il valore assoluto d'un angolo paragonando l'arco, che gli serve di misura, a tutta la circonferen-

za: per esempio, se l'arco CD stà alla circonferenza come 3 a 25, l'angolo A sarà $\frac{3}{25}$ di quattro angoli retti, o $\frac{12}{25}$ d'un angolo retto.

Potrà pure accadere che gli archi paragonati non abbiano alcuna misura comune; allora non si avranno per gli angoli se non che dei rapporti in numeri più, o meno prossimi, secondo che l'operazione sarà stata spinta più, o meno lungi.

LIBRO TERZO

LE PROPORZIONI DELLE FIGURE

DEFINIZIONI

1. Chiamerò *figure equivalenti* quelle, le di cui superficie sono uguali.

Due figure possono essere equivalenti, quantunque siano affatto dissimili; per esempio, un circolo può essere equivalente a un quadrato, un triangolo ad un rettangolo, ec.

La denominazione di *figure uguali* sarà conservata a quelle, che essendo applicate l'una sull'altra coincidono in tutti i lor punti. Tali sono due circoli, di cui i raggi siano uguali, due triangoli, di cui i tre lati siano respettivamente uguali, ec.

2. Due figure son *simili* quando hanno gli angoli respettivamente uguali, ed i lati *omologhi* proporzionali. Per lati omologhi s'intendono quelli, che hanno la medesima posizione nelle due figure, o che sono adiacenti ad angoli uguali. Questi angoli stessi si chiamano angoli *omologhi*.

Due figure uguali son sempre simili, ma due figure simili possono essere molto disuguali.

3. In due circoli differenti si chiamano *ar*

chi simili, *settori simili*, *segmenti simili* quelli, che corrispondono ad angoli al centro uguali.

Così, essendo l'angolo A uguale all'angolo O, l'arco BC è simile all'arco DE, il settore ABC al settore ODE, ec. Fig. 92.

4. L'*altezza* d'un paralellogrammo è la perpendicolare EF condotta fra i due lati, o *basi* opposte AB, CD. Fig. 93.

5. L'*altezza* d'un triangolo è la perpendicolare AD abbassata da un angolo A sul lato opposto BC, che si chiama la *base*. Fig. 94.

6. L'*altezza* del trapezio è la perpendicolare EF condotta fra le sue due *basi* paralelle AB, CD. Fig. 95.

7. *Area* e *superficie* d'una figura sono termini presso a poco sinonimi. L'area indica più particolarmente la quantità superficiale della figura in quanto che essa è misurata mediante il paragone ad altre superficie.

N. B. Per l'intelligenza di questo Libro, e dei seguenti bisogna aver presente la teoria delle proporzioni, per la quale rimandiamo ai Trattati ordinarj di Aritmetica, e d'Algebra. Faremo solamente un'osservazione, che è importantissima per fissare il vero senso delle proporzioni, e dissipare ogni oscurità sì nell'enunciato, che nelle dimostrazioni.

Se si abbia la proporzione A : B :: C : D, si sa che il prodotto degli estremi A×D è uguale al prodotto de' medj B×C.

Questa verità è incontrastabile in numeri;

lo è pure in grandezze di qualunque sorte, purchè si esprimano, o s'imaginino espresse in numeri; il che si può sempre supporre: per esempio, se A, B, C, D sono linee, si può imaginare che una di queste quattro linee, o sivvero una quinta, serva di misura comune a tutte, e sia presa per unità; allora A, B, C, D rappresentan ciascuna un certo numero d'unità intero, o fratto, commensurabile, o incommensurabile, e la proporzione fra le linee A, B, C, D diventa una proporzione di numeri. Il prodotto delle linee A, e D, che si chiama ancora il loro *rettangolo*, non è dunque altro che il numero d'unità lineari contenute in A moltiplicato per il numero delle unità lineari contenute in D; e si concepisce facilmente che questo prodotto può, e dev'essere uguale a quello, che resulta similmente dalle linee B, e C.

Le grandezze A, e B posson essere d'una specie, per esempio, linee, e le grandezze C e D d'un'altra specie, per esempio, superficie: allora bisogna riguardar sempre queste grandezze come numeri; A, e B si esprimeranno in unità lineari, C, e D in unità superficiali, ed il prodotto A×D sarà un numero, come il prodotto B×C.

Generalmente in tutte le operazioni, che si faranno sulle proporzioni, bisogna sempre riguardare i termini di queste proporzioni come tanti numeri, ciascuno della specie che gli conviene, e non si durerà alcuna fatica a concepir queste operazioni, e le conseguenze che ne derivano.

Dobbiamo pure avvertire che parecchie delle nostre dimostrazioni sono fondate sopra alcune delle regole più semplici dell'Algebra, le quali sono fondate esse stesse sugli assiomi cogniti: così, se si ha A=B+C, e si moltiplichi ogni membro per una stessa quantità M, se ne conchiude A×M=B×M +C×M. Parimente, se si ha A=B+C, e D=E—C, e si aggiungano le quantità uguali, scancellando +C, e —C, che si distruggono, se ne conchiuderà A+D=B+E; e così d'altri casi. Tutto ciò è assai chiaro di per se; ma in caso di difficoltà sarà bene consultare i Libri d'Algebra, e di frammischiare lo studio delle due Scienze.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA

I paralellogrammi, che hanno basi uguali, ed altezze uguali, sono equivalenti.

Sia AB la base comune de' due paralellogrammi ABCD, ABEF: poichè si suppongono della medesima altezza, le basi superiori DC, FE saranno situate sopra una medesima linea retta paralella ad AB. Ora, per la natura dei paralellogrammi, si ha AD=BC, e AF=BE; per la medesima ragione, si ha DC=AB, e FE=AB; dunque DC=FE; dunque togliendo DC, e FE dalla medesima linea DE, i resti CE, e DF saranno uguali. Da ciò segue che i triangoli DAF, CBE sono equilateri fra di loro, e per conseguenza uguali. Fig. 96.

Ma, se dal quadrilatero ABED si toglie il triangolo ADF, resta il paralellogrammo ABEF; e se dallo stesso quadrilatero ABED si toglie il triangolo CBE, resta il paralellogrammo ABCD. Dunque i due paralellogrammi ABCD, ABEF, che hanno la medesima base, e la medesima altezza, sono equivalenti.

Fig. 97. *Corollario*. Dunque ogni paralellogrammo ABCD è equivalente al rettangolo ABEF sulla medesima base, e della medesima altezza.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA

Fig. 98. *Ogni triangolo* ABC *è la metà del paralellogrammo* ABCD, *che ha la medesima base, e la medesima altezza.*

* 31, 1. Perchè i triangoli ABC, ACD sono uguali *.

Corollario 1. Dunque un triangolo ABC è la metà del rettangolo BCEF, che ha la medesima base BC, e la medesima altezza AO; poichè il rettangolo BCEF è equivalente al paralellogrammo ABCD.

Corollario 2. Tutti i triangoli, che hanno basi uguali, ed altezze uguali, sono equivalenti.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA

Fig. 99. *Due rettangoli della medesima altezza stanno fra loro come le respettive basi.*

Siano ABCD, AEFD due rettangoli, che

hanno per altezza comune AD; dico che stanno fra loro come le loro basi AB, AE.

Supponiamo primieramente che le basi AB, AE siano commensurabili fra di loro, e che stiano, per esempio, come i numeri 7 e 4: se si divide AB in sette parti uguali, AE conterrà 4 di queste parti; alzate ad ogni punto di divisione una perpendicolare alla base, formerete così sette rettangoli parziali, che saranno fra loro uguali, perchè avranno la medesima base, e la medesima altezza. Il rettangolo ABCD conterrà sette rettangoli parziali, mentre AEFD ne conterrà quattro. Dunque il rettangolo ABCD stà al rettangolo AEFD come 7 a 4, o come AB stà ad AE. Il medesimo ragionamento può essere applicato ad ogni altro rapporto diverso da quello di 7 a 4; dunque, qualunque sia questo rapporto, purchè commensurabile, si avrà

ABCD : AEFD :: AB : AE.

Supponiamo in secondo luogo che le basi AB, AE siano incommensurabili fra di loro; dico che sarà parimente Fig. 100.

ABCD : AEFD :: AB : AE.

Poichè, se questa proporzion non è vera, restando gli stessi i tre primi termini, il quarto sarà maggiore, o minore di AE. Supponiamo che sia maggiore, e che si abbia

ABCD : AEFD :: AB : AO.

Dividete la linea AB in parti uguali minori di EO, vi sarà almeno un punto di divisione I situato fra E, ed O; per questo

punto alzate la perpendicolare IK; le basi AB, AI saranno commensurabili fra di loro; e così si avrà, secondo ciò che si è ora dimostrato,

ABCD : AIKD :: AB : AI.

Ma si ha per supposizione

ABCD : AEFD :: AB : AO.

In queste due proporzioni gli antecedenti sono uguali; dunque i conseguenti sono proporzionali, e ne resulta

AIKD : AEFD :: AI : AO.

Ora AO è maggiore d'AI; dunque, affinchè sussistesse la proporzione, bisognerebbe che il rettangolo AEFD fosse maggiore di AIKD; ma al contrario è minore; dunque la proporzione è impossibile; dunque ABCD non può stare ad AEFD come AB stà ad una linea maggiore di AE.

Con un ragionamento affatto simile si proverebbe che il quarto termine della proporzione non può esser minore di AE; dunque esso è esattamente uguale ad AE.

Laonde, qualunque sia il rapporto delle basi, due rettangoli della medesima altezza ABCD, AEFD stanno fra loro come le loro basi AB, AE.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA

Fig. 101. *Due rettangoli qualunque* ABCD, AEGF *stanno fra loro come i prodotti delle basi moltiplicate per l'altezze; talmente che si ha* ABCD : AEGF :: AB×AD : AE×AF.

Avendo disposto i due rettangoli in modo che gli angoli in A sieno opposti al vertice, prolungate i lati GE, CD finchè s'incontrino in H: i due rettangoli ABCD, AEHD hanno la medesima altezza AD; stanno dunque fra loro come le basi AB, AE: parimente i due rettangoli AEHD, AEGF hanno la medesima altezza AE; stanno dunque come le loro basi AD, AF; laonde si avranno le due proporzioni

$$ABCD : AEHD :: AB : AE,$$
$$AEHD : AEGF :: AD : AF.$$

Moltiplicando per ordine queste due proporzioni, e osservando che il medio termine AEHD può essere omesso, come moltiplicatore comune all'antecedente ed al conseguente, si avrà

$$ABCD : AEGF :: AB \times AD : AE \times AF.$$

Scolio. Dunque si può prendere per misura d'un rettangolo il prodotto della sua base per la sua altezza, purchè s'intenda per questo prodotto quello di due numeri, cioè, il numero d'unità lineari contenute nella base, ed il numero d'unità lineari contenute nell'altezza.

Questa misura d'altronde non è assoluta, ma soltanto relativa; suppone che si valuti similmente un altro rettangolo misurando i suoi lati colla stessa unità lineare; si ottiene così un secondo prodotto; ed il rapporto dei due prodotti è uguale a quello de' rettangoli, conforme alla proposizione or dimostrata.

Per esempio, se la base del rettangolo A

è di tre unità, e la sua altezza di dieci, il rettangolo sarà rappresentato dal numero 3×10, ossia 30, numero che così isolato non significa niente; ma se si ha un secondo rettangolo B, la di cui base sia di dodici unità, e l'altezza di sette, il secondo rettangolo sarà rappresentato dal numero 7×12, cioè 84: di quì si conchiuderà che i due rettangoli A, e B stanno fra loro come 30 stà a 84; dunque, se si convenisse di prendere il rettangolo A per unità di misura nelle superficie, il rettangolo B avrebbe allora per misura assoluta $\frac{84}{30}$, cioè sarebbe uguale a $\frac{84}{30}$ unità superficiali.

È più comune, e più semplice il prendere il quadrato per l'unità di superficie, e si sceglie il quadrato, il cui lato sia l'unità di lunghezza; allora la misura, che abbiam riguardato semplicemente come relativa, diventa assoluta: per esempio, il numero 30, col quale abbiamo misurato il rettangolo A, rappresenta 30 unità superficiali, o 30 di quei quadrati, il cui lato è uguale all'unità. Ciò è reso sensibile dalla figura 102.

Fig. 102.

Si confonde assai spesso in Geometria il prodotto di due linee col loro *rettangolo*, e quest'espressione è anche passata nell'Aritmetica, ove il prodotto di due numeri ineguali si chiama il loro rettangolo, come si chiama *quadrato* il prodotto d'un numero moltiplicato per se medesimo.

I quadrati de' numeri 1, 2, 3, ec. sono 1, 4, 9, ec. Così si vede che il quadrato

fatto sopra una linea doppia è quadruplo, sopra una linea tripla è nove volte più grande, e così di seguito. Fig. 103.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA

L'area d'un paralellogrammo qualunque è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Poichè il paralellogrammo ABCD è equivalente al rettangolo ABEF, che ha la medesima base AB, e la medesima altezza BE*; or questo ha per misura AB×BE*; dunque AB×BE è eguale all'area del paralellogrammo ABCD. Fig. 99. * 1. * 4.

Corollario. Dunque i paralellogrammi della medesima base stanno fra loro come le loro altezze, ed i paralellogrammi della medesima altezza stanno fra loro come le basi; poichè, A, B, C essendo tre grandezze qualunque, si ha generalmente A×C : B×C :: A : B.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA

L'area d'un triangolo è uguale al prodotto della sua base per la metà della sua altezza.

Poichè il triangolo ABC è la metà del paralellogrammo ABCE, che ha la medesima base BC, e la medesima altezza AD*: ora la superficie del paralellogrammo = BC×AD*; dunque quella del triangolo = $\frac{1}{2}$(BC×AD), o BC×$\frac{1}{2}$AD. Fig. 104. * 2. * 5.

Corollario. Dunque due triangoli della medesima altezza stanno fra loro come le basi, e due triangoli della medesima base stanno fra loro come le altezze.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA

Fig. 105. *L' area del trapezio* ABCD *è uguale alla* * *sua altezza* EF *moltiplicata per la mezza-somma delle due basi paralelle* AB, CD.

Per il punto I, mezzo del lato CB, conducete KL paralella al lato opposto AD, e prolungate DC finchè incontri KL.

Nei triangoli IBL, ICK si ha il lato IB=IC, per costruzione, l'angolo LIB=CIK, e l'angolo IBL=ICK, poichè CK, e BL son paralelle *; dunque questi triangoli sono uguali **; dunque il trapezio ABCD è equivalente al paralellogrammo ADKL, ed ha per misura EF×AL.

* 25, 1.
** 7, 1.

Ma si ha AL=DK; e poichè il triangolo IBL è uguale al triangolo KCI, anco il lato BL=CK: dunque AB+CD=AL+DK=2AL, ovvero AL è la mezza-somma delle basi AB, CD: dunque finalmente l'area del trapezio ABCD è uguale all'altezza EF moltiplicata per la mezza-somma delle basi AB, CD, il che si esprime così: $ABCD=EF\times\frac{AB+CD}{2}$.

Scolio. Se per il punto I, mezzo di BC, si conduce IH paralella alla base AB, il punto H sarà pure il mezzo di AD, perchè la figura AHIL è un paralellogrammo, come anche

DHIK; si ha dunque AH=IL, e DH=IK: ora IL=IK, poichè i triangoli BIL, CIK sono uguali; dunque AH=DH.

Si può osservare che la linea HI=AL=$\frac{AB+CD}{2}$; dunque l'area del trapezio può esprimersi così EF×HI. Essa è uguale all'altezza del trapezio moltiplicata per la linea, che unisce i mezzi dei lati non paralelli.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA

Se una linea AC *è divisa in due parti* AB, BC, *il quadrato fatto sull'intera linea* AC *conterrà il quadrato fatto sopra* AB, *più il quadrato fatto sopra* BC, *più due volte il rettangolo compreso sotto le due parti* AB, *e* BC, *il che si esprime così:* $\overline{AC}^2$ *o* $(AB+BC)^2 = \overline{AB}^2+\overline{BC}^2+2AB\times BC$. Fig. 106.

Costruite il quadrato ACDE; prendete AF=AB; conducete FG paralella ad AC, e BH paralella ad AE.

Il quadrato ACDE è diviso in quattro parti: la prima ABIF è il quadrato fatto sopra AB, poichè si è preso AF=AB; la seconda IGDH è il quadrato fatto sopra BC, poichè, siccome si ha AC=AE, e AB=AF, la differenza AC—AB è uguale alla differenza AE—AF, cioè BC=EF. Ma, a cagion delle paralelle, IG=BC, e DG=EF; dunque HIGD è uguale al quadrato fatto sopra BC. Essendo tolte queste due parti dal quadrato

totale, restano i due rettangoli BCGI, EFIH, che hanno ciascun per misura AB×BC. Dunque il quadrato fatto sopra AC, ec.

Scolio. Questa proposizione si accorda con quella, che si dimostra in Algebra per la formazione del quadrato d'un binomio, e ch'è così espressa $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA

Fig. 107. *Se la linea* AC *è la differenza di due linee rette* AB, BC, *il quadrato fatto sopra* AC *conterrà il quadrato* AB, *più il quadrato di* BC, *meno due volte il rettangolo fatto sopra* AB, *e* BC; *cioè si avrà* $\overline{AC}^2$, *o* $(AB-BC)^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2AB\times BC$.

Costruite il quadrato ABIF; prendete AE=AC; conducete CG parallela a BI, HK parallela ad AB; e terminate il quadrato EFLK.

I due rettangoli CBIG, GLKD hanno ciascun per misura AB×BC: se si tolgano entrambi dalla figura intera ABILKEA, che ha per valore $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$, è chiaro che resterà il quadrato ACDE; dunque, ec.

Scolio. Questa proposizione combina colla formula d'Algebra $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA

Il rettangolo fatto sulla somma, e la differenza di due rette è uguale alla differenza dei quadrati di queste linee: così si ha (AB+BC) $\times$(AB—BC)=$\overline{AB}^2-\overline{BC}^2$. Fig. 108.

Costruite sopra AB, ed AC i quadrati ABIF, ACDE; prolungate AB d'una quantità BK=BC; e terminate il rettangolo AKLE.

La base AK del rettangolo è la somma delle due rette AB, BC; la sua altezza AB è la differenza di queste medesime linee. Dunque il rettangolo AKLE=(AB+BC)$\times$(AB—BC). Ma questo medesimo rettangolo è composto delle due parti ABHE+BHLK, e la parte BHLK è uguale al rettangolo EDGF, perchè BH=ED, e BK=EF; dunque AKLE=ABHE+EDGF. Or queste due parti formano il quadrato ABIF, meno il quadrato fatto sopra BC: dunque finalmente (AB+BC) $\times$ (AB—BC)=$\overline{AB}^2-\overline{BC}^2$.

Scolio. Questa proposizione combina colla formula d'Algebra $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA

Il quadrato fatto sull' ipotenusa d' un triangolo rettangolo è uguale alla somma dei quadrati fatti sopra gli altri due lati.

Fig. 109. Sia ABC un triangolo rettangolo in A: avendo formato de' quadrati sopra i tre lati, abbassate dall' angolo retto sopra l' ipotenusa la perpendicolare AD, che prolungherete fino in E; tirate quindi le diagonali AF, CH.

L'angolo ABF è composto dell'angolo ABC più l' angolo retto CBF; l' angolo CBH è composto del medesimo angolo ABC più l' angolo retto ABH; dunque l' angolo ABF=HBC. Ma AB=BH, come lati d' un medesimo quadrato, e BF=BC per la medesima ragione; dunque i triangoli ABF, HBC hanno un angolo uguale compreso fra lati uguali; dunque
* 6, 1. sono uguali *.

Il triangolo ABF è la metà del rettangolo BDEF (o, per più brevità, del rettangolo BE), che ha la medesima base BF, e la
* Pr. 2. medesima altezza BD *. Il triangolo HBC è parimente la metà del quadrato AH, perchè essendo retto l' angolo BAC, come pure BAL, AC, ed AL non fanno che una sola linea retta paralella ad HB; dunque il triangolo HBC, ed il quadrato AH, che hanno la base comune BH, hanno pure l' altezza comune AB; dunque il triangolo è la metà del quadrato.

Si è provato che il triangolo ABF è ugua-

le al triangolo HBC; dunque il rettangolo BDEF, doppio del triangolo ABF, è equivalente al quadrato AH, doppio del triangolo HBC. Si dimostrerà parimente che il rettangolo CDEG è equivalente al quadrato AI; ma i due rettangoli BDEF, CDEG presi insieme fanno il quadrato BCGF; dunque il quadrato BCGF fatto sull'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati ABHL, ACIK fatti sugli altri due lati, o in altri termini, $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

Corollario I. Dunque il quadrato d'uno dei due lati dell'angolo retto è uguale al quadrato dell'ipotenusa meno il quadrato dell'altro lato; il che si esprime così $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$.

Corollario II. Sia ABCD un quadrato, AC la sua diagonale; il triangolo ABC è rettangolo ed isoscele, onde si avrà $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AB}^2$. Dunque *il quadrato fatto sulla diagonale* AC *è doppio del quadrato fatto sul lato* AB. Fig. 108.

Si può render sensibile questa proprietà conducendo per i punti A, e C delle paralelle a BD, e per i punti B, e D delle paralelle ad AC: si formerà così il quadrato EFGH, ch' è il quadrato di AC. Or si vede che EFGH contiene otto triangoli uguali, e ABCD quattro; dunque il quadrato EFGH è doppio d'ABCD.

Poichè $\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 :: 2 : 1$, si ha, estraendo

la radice quadrata, $AC : AB :: \sqrt{2} : 1$. Dunque *la diagonal d'un quadrato è incommensurabile col suo lato*.

Ciò si spiegherà di più in un'altra occasione.

Fig. 109. *Corollario III.* Si è dimostrato che il quadrato AH è equivalente al rettangolo BDEF; ora, a cagione dell'altezza comune BF, il quadrato BCGF stà al rettangolo BDEF come la base BC alla base BD; dunque

$$\overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 :: BC : BD$$

Dunque *il quadrato dell'ipotenusa stà al quadrato d'uno dei lati dell'angolo retto come l'ipotenusa stà al segmento adjacente a questo lato*. Il *segmento*, di cui si tratta, è la parte dell'ipotenusa determinata dalla perpendicolare abbassata dall'angolo retto; così BD è il segmento adjacente al lato AB, e DC è il segmento adjacente al lato AC. Si avrebbe similmente

$$\overline{BC}^2 : \overline{AC}^2 :: BC : CD.$$

Corollario IV. I rettangoli BDEF, DCGE, avendo pure la medesima altezza, stanno fra loro come le loro basi BD, DC. Or questi rettangoli sono equivalenti ai quadrati $\overline{AB}^2$, $\overline{BC}^2$; dunque

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BD : DC.$$

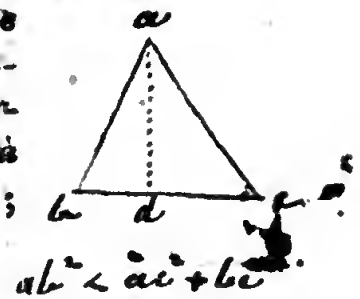
Dunque *i quadrati dei due lati dell'angolo retto stanno fra loro come i segmenti dell'ipotenusa adjacenti a questi lati*.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA

In un triangolo ABC, *se l'angolo* C *è acuto, il quadrato del lato opposto sarà minore della somma dei quadrati dei lati, che comprendono l'angolo* C; *ed abbassando la perpendicolare* AD *sopra* BC, *la differenza sarà uguale al doppio del rettangolo* BC×CD; *talmente che si avrà*

Fig. 110.



$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times CD.$$

Vi sono due casi. 1.° Se la perpendicolare cade dentro del triangolo ABC, si avrà $BD = BC - CD$, e per conseguenza * $\overline{BD}^2 =$ * Pr. 9. $\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2BC \times CD$. Aggiungendo da ambe le parti $\overline{AD}^2$, e osservando che i triangoli rettangoli ABD, ABC dànno $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$, e $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2$, si avrà $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2BC \times CD$.

2.° Se la perpendicolare AD cade fuori del triangolo ABC, si avrà $BD = CD - BC$, e per conseguenza * $\overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 - 2CD \times BC$. * 9. Aggiungendo da ambe le parti $\overline{AD}^2$, se ne conchiuderà medesimamente

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2BC \times CD.$$

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA

Fig. 111. *In un triangolo* ABC, *se l'angolo* C *è ottuso, il quadrato del lato opposto* AB *sarà maggiore della somma dei quadrati dei lati, che comprendono l'angolo* C, *ed abbassando* AD *perpendicolare sopra* BC, *la differenza sarà uguale al doppio del rettangolo* BC×CD; *talmente che si avrà*

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2+2BC\times CD.$$

La perpendicolare non può cadere dentro del triangolo perchè, se cadesse, per esempio, in E, il triangolo ACE avrebbe ad un tempo stesso l'angolo retto E, e l'angolo ottuso C, il che è impossibile *: dunque cade al di fuori, e si ha BD=BC+CD. Di quì resulta * $\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+2BC\times CD$. Aggiungendo da ambe le parti $\overline{AD}^2$, e facendo le riduzioni, come nel teorema precedente, se ne conchiuderà $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2+2BC\times CD$.

* 20, 1.

* Pr. 8.

Scolio. Non v'è che il triangolo rettangolo, in cui la somma dei quadrati di due lati sia uguale al quadrato del terzo; poichè, se l'angolo compreso da questi lati è acuto, la somma de' loro quadrati sarà maggiore del quadrato del lato opposto; se è ottuso, sarà minore.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA

In un triangolo qualunque ABC, *se si conduce dal vertice al mezzo della base la linea retta* AE, *dico che si avrà* $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{BE}^2$. Fig. 112

Abbassate la perpendicolare AD sulla base BC; il triangolo AEC darà per il teorema XII.

$$\overline{AC}^2=\overline{AE}^2+\overline{EC}^2-2EC\times ED.$$

Il triangolo ABE darà per il teorema XIII.

$$\overline{AB}^2=\overline{AE}^2+\overline{EB}^2+2EB\times ED.$$

Dunque, sommando, ed osservando che EB=EC, si avrà

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{EB}^2.$$

Corollario. In ogni paralellogrammo la somma dei quadrati de' lati è uguale alla somma dei quadrati delle due diagonali.

Poichè le diagonali AC, BD si tagliano scambievolmente in due parti uguali al punto E *, il triangolo ABC dà Fig. 113. * 32,1.

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{BE}^2.$$

Il triangolo ADC dà parimente

$$\overline{AD}^2+\overline{DC}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{DE}^2.$$

Sommando membro con membro, e osservando che BE=DE, si avrà

$$\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+\overline{DC}^2+\overline{BC}^2=4\overline{AE}^2+4\overline{DE}^2.$$

Ma $4\overline{AE}^2$ è il quadrato di 2AE, o di AC;

$\overline{4DE}^2$ è il quadrato di BD; dunque la somma de' quadrati de' lati è eguale alla somma dei quadrati delle due diagonali.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA

Fig. 114. *La linea* DE, *condotta paralellamente alla base d'un triangolo* ABC, *divide i lati* AB, AC *proporzionalmente; talmente che si ha* AD : DB :: AE : EC.

Tirate BE, e DC; i due triangoli BDE, DEC hanno la medesima base DE; hanno pure la medesima altezza, poichè i vertici B, e C sono situati sopra una paralella alla base; dunque questi triangoli sono
* Pr. 2. equivalenti *.

I triangoli ADE, BDE, di cui il vertice comune è E, hanno la medesima altezza, e stanno perciò fra loro come le basi AD,
* Pr. 6. BD *, onde si ha

ADE : BDE :: AD : BD.

I triangoli ADE, DEC, di cui il vertice comune è D, hanno pure la medesima altezza, e stanno fra loro come le basi AE, EC; dunque

ADE : DEC :: AE : EC.

Ma il triangolo BDE=DEC; dunque, a motivo del rapporto comune in queste due proporzioni, se ne conchiuderà

AD : DB :: AE : EC.

Corollario I. Di quì resulta *componendo* AD+DB : AD :: AE+EC : AE, o AB :

AD : : AC : AE, e così pure AB : BD : : AC : CE.

Corollario II. Se fra due rette AB, CD *si conducono quante si vogliano paralelle* AC, EF, GH, BD, *ec., queste rette saranno tagliate proporzionalmente, e sarà* AE : CF : : EG : FH : : GB : HD. Fig. 115.

Perchè, sia O il punto di concorso delle rette AB, CD: nel triangolo OEF, ove la linea AC è condotta paralella alla base, si avrà OE : AE : : OF : CF, o OE : OF : : AE : CF. Nel triangolo OGH si avrà similmente OE : EG : : OF : FH, od OE : OF : : EG : FH. Dunque, a cagione del rapporto comune OE : OF, queste due proporzioni danno AE : CF : : EG : FH. Si dimostrerà nello stesso modo che si ha EG : FH : : GB : HD, e così in seguito. Dunque le linee AB, CD sono tagliate proporzionalmente dalle paralelle EF, GH, ec.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA

Viceversa, se i lati AB, AC *sono tagliati proporzionalmente dalla retta* DE, *talmente che sia* AD : DB : : AE : EC, *dico che la linea* DE *sarà paralella alla base* BC. Fig. 116.

Poichè, se DE non è paralella a BC, supponiamo che la sia DO; allora, secondo il teorema precedente, si avrà AD : BD : : AO : OC. Ma, per ipotesi, AD : DB : : AE : EC; dunque si avrebbe AO : OC : : AE : EC; proporzione impossibile, poichè da una

parte l'antecedente AE è maggiore dell'antecedente AO, e dall'altra il consiguente EC è minore di OC. Dunque la paralella a BC condotta dal punto D non può differir da DE; dunque DE è la vera paralella.

Scolio. La medesima conclusione avrebbe luogo se si supponesse la proporzione AB : AD :: AC : AE. Poichè questa proporzione darebbe AB—AD : AD :: AC—AE : AE, ovvero BD : AD :: CE : AE.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA

Fig. 137. *La linea retta* AD, *che divide in due parti uguali l'angolo* BAC *d'un triangolo, dividerà la base* BC *in due segmenti* BD, DC *proporzionali ai lati adjacenti* AB, AC; *talmente che si avrà* BD : DC :: AB : AC.

Per il punto C conducete CE paralella ad AD fintanto che incontri il lato BA prolungato.

Nel triangolo BCE la linea AD è paralella alla base CE, onde si ha la proporzione *

* 15, BD : DC :: AB : AE.

Ma il triangolo ACE è isoscele, perchè, a cagione delle paralelle AD, CE, l'angolo ACE=DAC, e l'angolo AEC=BAD *:

* 25, 1. ora, per supposizione, DAC=BAD; dunque l'angolo ACE=AEC; dunque il lato

* 13, 1. AE=AC *; e sostituendo AC in vece di AE nella proporzion precedente, si avrà

BD : DC :: AB : AC.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA

Due triangoli equiangoli hanno i lati omologhi proporzionali, e son simili.

Siano ABC, CDE due triangoli, che hanno gli angoli respettivamente uguali, cioè BAC=CDE, ABC=DCE, e ACB=DEC; dico che i lati omologhi, o adjacenti agli angoli uguali, saranno proporzionali; talmente che si avrà BC : CE :: AB : CD :: AC : DE. Fig. 119.

Situate i lati omologhi BC, CE nella medesima direzione, e prolungate i lati BA, ED finchè s'incontrino in F. Poichè BCE è una linea retta, e che l'angolo BCA=CED, ne segue che AC è paralella a DE *. Parimente, poichè l'angolo ABC=DCE, la linea AB è paralella a DC. Dunque la figura ACDF è un paralellogrammo. * 25, 1.

Nel triangolo BFE la linea AC è paralella alla base FE, onde si ha BC : CE :: BA : AF *. In vece di AF si può mettere la sua uguale CD, e si avrà * 15.

BC : CE :: BA : CD.

Nel medesimo triangolo BFE, se si riguardi BF come la base, CD è una paralella a questa base, e si ha la proporzione BC : CE :: FD : DE. In vece di FD mettendo la sua uguale AC, si avrà

BC : CE :: AC : DE.

Finalmente da queste due proporzioni,

che contengono il medesimo rapporto BC : CE, si può concludere ancora

AC : DE :: BA : CD.

Dunque i triangoli equiangoli BAC, CDE hanno i lati omologhi proporzionali: ma seguendo la definizione II.ª, due figure son simili quando hanno ad un tempo stesso gli angoli respettivamente uguali, ed i lati omologhi proporzionali; dunque i triangoli equiangoli BAC, CDE son due figure simili.

Corollario. Affinchè due triangoli siano simili basta che abbiano due angoli respettivamente uguali, perchè allora il terzo sarà uguale in ambedue i triangoli, ed essi saranno respettivamente equiangoli.

Scolio. Osservate che nei triangoli simili i lati omologhi son opposti ad angoli uguali; così, essendo l'angolo ACB uguale a DEC, il lato AB è omologo a DC; medesimamente AC, e DE sono omologhi, perchè son opposti ad angoli eguali: essendo riconosciuti i lati omologhi, si formano facilmente le proporzioni

AB : DC :: AC : DE :: BC : CE.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA

Due triangoli, che hanno tutti i lati omologhi proporzionali, sono equiangoli, e perciò simili.

Fig. 120 Supponiamo che si abbia BC : EF :: AB : DE :: AC : DF, dico che i triangoli ABC,

DEF avranno gli angoli uguali, cioè A=D, B=E, C=F.

Fate al punto E l'angolo FEG=B, ed al punto F l'angolo EFG=C; il terzo G sarà uguale al terzo A; e i due triangoli ABC, EFG saranno equiangoli. Dunque si avrà per il teorema precedente BC : EF :: AB : EG; ma, per supposizione, BC : EF :: AB : DE; dunque EG=DE. Si avrà ancora per il teorema medesimo BC : EF :: AC : FG. Ora si ha per supposizione BC : EF :: AC : DF; dunque FG=DF. Dunque i triangoli EGF, DEF hanno i tre lati respettivamente uguali; dunque sono uguali *. Ma, per costruzione, il triangolo EGF è equiangolo al triangolo ABC; dunque anche i triangoli DEF, ABC sono equiangoli, e simili.

* 11, 1.

Scolio I. Si vede da queste due ultime proposizioni che nei triangoli l'eguaglianza degli angoli è una conseguenza della proporzionalità dei lati, e reciprocamente; in modo che una di queste condizioni serve per assicurar la similitudine dei triangoli. Non è lo stesso nelle figure di più di tre lati, perchè, cominciando fino da' quadrilateri, si può, senza cambiar gli angoli, alterare la proporzione de' lati, o senza alterare i lati cangiare la grandezza degli angoli: così la proporzionalità dei lati non può essere una conseguenza dell' uguaglianza degli angoli, nè *viceversa*. Si vede, per esempio, che, conducendo EF paralella a BC, gli angoli del quadrilatero AEFD sono uguali a quelli del quadrilatero ABCD;

Fig. 121.

ma la proporzione de' lati è differente: del pari, senza cangiar di lunghezza i quattro lati AB, BC, CD, AD, si può avvicinare, o allontanare il punto B dal punto D, il che altererà gli angoli.

Scolio II. Le due proposizioni precedenti, che propriamente ne fanno una sola, unite a quella del quadrato dell'ipotenusa, sono le proposizioni più importanti, e più feconde della Geometria; bastano quasi esse sole a tutte le applicazioni, ed alla risoluzione di tutti i problemi: la ragione si è che tutte le figure posson dividersi in triangoli, ed un triangolo qualunque in due triangoli rettangoli. Perciò le proprietà generali dei triangoli racchiudono implicitamente quelle di tutte le rettilinee figure.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA

Due triangoli, che hanno un angolo eguale compreso fra lati proporzionali, son simili.

Fig. 122. Sia l'angolo A=D, e supponiamo che si abbia AB : DE :: AC : DF; dico che il triangolo ABC è simile a DEF.

Prendete AG=DE, e conducete GH paralella a BC: l'angolo AGH sarà uguale
* 25,1. all'angolo ABC *, ed il triangolo AGH sarà equiangolo al triangolo ABC; si avrà dunque AB : AG :: AC : AH. Ma, per supposizione, AB : DE :: AC : DF, e, per costruzione, AG=DE; dunque AH=DF. I due triangoli AGH, DEF hanno perciò

un angolo uguale compreso fra lati uguali, e per conseguenza sono uguali. Ora il triangolo AGH è simile ad ABC; dunque DEF è pure simile ad ABC.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA

Due triangoli, che hanno i lati omologhi paralelli, o che gli hanno respettivamente perpendicolari, son simili.

Perchè 1.° se il lato AB è paralello a DE, e BC ad EF, l'angolo ABC sarà uguale a DEF *; se di più AC è paralella a DF, l'angolo ACB sarà uguale a DFE, e così BAC ad EDF; dunque i triangoli ABC, DEF sono equiangoli; dunque son simili. Fig. 123. * 28, 1.

2.° Sia il lato DE perpendicolare ad AB, e il lato DF ad AC; nel quadrilatero AIDH i due angoli I, e H saranno retti; i quattro angoli equivalgono insieme a quattro angoli retti*; dunque i due rimanenti IAH, IDH equivalgonno a due angoli retti. Ma i due angoli EDF, IDH equivalgono pure a due angoli retti: dunque l'angolo EDF è eguale a IAH, o BAC. Parimente, se il terzo lato EF è perpendicolare al terzo BC, si dimostrerà che l'angolo DFE=C, e DEF=B. Dunque i due triangoli ABC, DEF, che hanno i lati respettivamente perpendicolari, sono equiangoli, e simili. Fig. 124. * 21, 1.

Scolio. Nel caso dei lati paralelli i lati omologhi sono i lati paralelli; ed in quello de' lati perpendicolari lo sono i lati perpen-

dicolari. Così, in quest'ultimo caso, DE è omologo ad AB, DF ad AC, ed EF a BC.

Il caso dei lati perpendicolari potrebbe offrire una situazione relativa di due triangoli differente da quella, che è supposta nella fig. 124; ma l'eguaglianza degli angoli respettivi si dimostrerebbe sempre o con dei quadrilateri, come AIDH, di cui due angoli son retti, o col paragone di due triangoli, i quali con degli angoli opposti al vertice avrebbero ciascuno un angolo retto: d'altronde si potrebbe sempre supporre che si fosse costruito dentro del triangolo ABC un triangolo DEF, i di cui lati fossero paralelli a quelli del triangolo paragonato ad ABC, ed allora la dimostrazione rientrerebbe nel caso della figura 124.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA

Fig. 125. *Le rette* AF, AG, *ec. condotte a piacimento dal vertice di un triangolo dividono proporzionalmente la base* BC, *e la sua paralella* DE; *talmente che si ha* DI : BF :: IK : FG :: KL : GH *ec.*

Poichè, siccome DI è paralella a BF, il triangolo ADI è equiangolo ad ABF, e si ha la proporzione DI : BF :: AI : AF. Parimente, essendo IK paralella a FG, si ha AI : AF :: IK : FG. Dunque, a cagione del rapporto comune AI : AF, si avrà DI : BF :: IK : FG. Si troverà similmente IK : FG :: KL : GH ec. Dunque la linea DE

è divisa nei punti I, K, L, come lo è la base BC nei punti F, G, H.

Corollario. Dunque, se BC è divisa in parti uguali nei punti F, G, H, la paralella DE sarà divisa parimente in parti uguali nei punti I, K, L.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA

Se dall'angolo retto A *d'un triangolo rettangolo si abbassa la perpendicolare* AD *sull'ipotenusa* Fig. 126.

1.° *I due triangoli parziali* ABD, ADC *saranno simili fra di loro, ed al triangolo totale* ABC.

2.° *Ogni lato* AB, *o* AC *sarà medio proporzionale fra l'ipotenusa* BC, *ed il segmento adjacente* BD, *o* DC.

3.° *La perpendicolare* AD *sarà media proporzionale fra i due segmenti* BD, DC.

Poichè 1.° il triangolo BAD, ed il triangolo BAC hanno l'angolo comune B; di più l'angolo retto BDA è uguale all'angolo retto BAC; dunque il terzo angolo BAD dell'uno è ugnale al terzo C dell'altro. Dunque questi due triangoli sono equiangoli, e perciò simili. Si dimostrerà parimente che il triangolo DAC è simile al triangolo BAC; dunque i tre triangoli sono simili fra di loro.

2.° Poichè il triangolo BAD è simile al triangolo BAC, i loro lati omologhi sono proporzionali. Ora il lato BD nel triangolo piccolo è omologo a BA nel grande, perchè

sono opposti ad angoli uguali BAD, BCA; l'ipotenusa BA del piccolo è omologa all'ipotenusa BC del grande; dunque si verifica la proporzione BD : BA :: BA : BC. Si avrebbe nella stessa maniera DC : AC :: AC : BC. Dunque 2.° ognuno dei lati AB, AC è medio proporzionale fra l'ipotenusa, e il segmento adjacente ad esso lato.

3.° Finalmente la similitudine dei triangoli ABD, ADC dà, paragonando i lati omologhi, BD : AD :: AD : DC. Dunque 3.° la perpendicolare AD è media proporzionale tra i segmenti BD, DC dell'ipotenusa.

Scolio. La proporzione BD : AB :: AB : BC dà, uguagliando il prodotto degli estremi a quello de' medj, $\overline{AB}^2 = BD \times BC$; si ha medesimamente $AC^2 = DC \times BC$; dunque $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BD \times BC + DC \times BC$: il secondo membro è la medesima cosa che $(BD+DC) \times BC$, e si riduce a $BC \times BC$ o $\overline{BC}^2$; dunque $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$; dunque il quadrato fatto sopra l'ipotenusa BC è uguale alla somma dei quadrati fatti sopra gli altri due lati AB, AC. Ritorniamo così alla proposizione del quadrato dell'ipotenusa per una strada differentissima da quella, che avevamo seguitata; d'onde si vede che, a parlar propriamente, la proposizione del quadrato dell'ipotenusa è una conseguenza della proporzio-

nalità dei lati nei triangoli equiangoli: laonde le proposizioni fondamentali della Geometria si riducono, per così dire, a questa sola, cioè, che i triangoli equiangoli hanno i loro lati omologhi proporzionali.

Accade spesso, come ne abbiam veduto adesso un esempio, che tirando delle conseguenze da una, o più proposizioni, si ricade su delle proposizioni già dimostrate. In generale ciò, che caratterizza particolarmente i teoremi di Geometria, ed è una prova invincibile della loro certezza, si è che combinandoli insieme in una maniera qualunque, purchè si ragioni giustamente, si cade sempre sopra resultati esatti. Non avverrebbe così se qualche proposizione fosse falsa, o non fosse vera che press'a poco; accaderebbe spesso che, per mezzo della combinazione delle proposizioni fra loro, l'errore si accrescerebbe, e diventerebbe sensibile. Si vedono esempj di ciò in tutte le dimostrazioni, dove ci serviamo della *riduzione all' assurdo*. Tali dimostrazioni, in cui si ha la mira di provare che due quantità sono uguali, consistono a far vedere che, se si ammettesse fra esse la minima disuguaglianza, ne risulterebbe per mezzo della serie dei ragionamenti un' assurdità manifesta, e palpabile; d' onde si rimane costretti a conchiudere che quelle due quantità sono uguali.

Corollario. Se da un punto A della circonferenza si conducano le due corde AB, AC all' estremità del diametro BC, il trian- Fig. 127.

* 18,2. golo ABC sarà rettangolo in A *. Dunque 1.° *la perpendicolare* AD *è media proporzionale fra i due segmenti del diametro* BD, DC, o, il che torna lo stesso, il quadrato $\overline{AD}^2$ è uguale al rettangolo BD×DC.

2.° *La corda* AB *è media proporzionale fra il diametro* BC, *ed il segmento adjacente* BD, o, il che torna lo stesso, $\overline{AB}^2$ = BD×BC. Si ha parimente $\overline{AC}^2$=CD×BC; dunque $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BD : DC$; e se si paragona $\overline{AB}^2$ a $\overline{BC}^2$, si avrà $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: BD : BC$; si avrebbe pure $\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2 :: DC : BC$. Questi rapporti dei quadrati dei lati sì fra loro, che col quadrato dell'ipotenusa, sono già stati dati nei corollarj 3, e 4 della proposizione XI.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA

Fig. 128. *Due triangoli, che hanno un angolo uguale, stanno fra loro come i rettangoli dei lati, che comprendono l'angolo uguale. Così il triangolo* ABC *stà al trinngolo* ADE *come il rettangolo* AB×AC *stà al rettangolo* AD×AE.

Tirate BE; i due triangoli ABE, ADE, il di cui vertice comune è in E, hanno la medesima altezza, e stanno fra di loro come le basi AB, AD *; dunque

* 6.

ABE : ADE :: AB : AD.

Si ha pure

$$ABC : ABE :: AC : AE.$$

Moltiplicando queste due proporzioni per ordine, ed omettendo il termine comune ABE, si avrà

$$ABC : ADE :: AB \times AC : AD \times AE.$$

Corollario. Dunque i due triangoli sarebbero equivalenti se il rettangolo $AB \times AC$ fosse uguale al rettangolo $AD \times AE$, o se si avesse $AB : AD :: AE : AC$; e questo avrebbe luogo se la linea DC fosse paralella a BE.

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA

Due triangoli simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi.

Sia l'angolo A=D, e l'angolo B=E; Fig. 122.
primieramente, a cagione degli angoli uguali A, e D, si avrà per la proposizion precedente

$$ABC : DEF :: AB \times AC :: DE \times EF.$$

D'altronde abbiamo, a causa della similitudine dei triangoli,

$$AB : DE :: AC : DF.$$

E, se si moltiplica questa proporzione termine a termine per la proporzione identica

$$AC : DF :: AC : DF,$$

ne risulterà

$$AB \times AC : DE \times DF :: \overline{AC}^2 : \overline{DF}^2.$$

Dunque $ABC : DEF :: \overline{AC}^2 : \overline{DF}^2$.

Dunque due triangoli simili ABC, DEF

stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi AC, DF, o come i quadrati di due altri lati omologhi qualunque siano.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA

Due poligoni simili sono composti d'un medesimo numero di triangoli simili respettivamente, e similmente disposti.

Fig. 129. Nel poligono ABCDE conducete da uno stesso angolo A le diagonali AC, AD agli altri angoli. Nell'altro poligono FGHIK, conducete similmente dall'angolo F eguale ed omologo ad A, le diagonali FH, FI agli altri angoli.

Poichè i poligoni sono simili, l'angolo ABC
* Def. 2. è uguale al suo omologo FGH *, e di più i lati AB, BC sono proporzionali ai lati FG, GH; talmente che si ha AB : FG :: BC : GH. Da ciò segue che i triangoli ABC, FGH hanno un angolo eguale compreso tra
* 20. lati proporzionali; dunque essi son simili *; dunque l'angolo BCA è uguale a GHF. Essendo tolti questi angoli uguali dagli angoli uguali BCD, GHI, i resti ACD, FHI saranno uguali. Ma, poichè i triangoli ABC, FGH sono simili, si ha AC : FH :: BC : GH. D'altronde, a cagione della si-
* Def. 2. militudine de' poligoni, * BC : GH :: CD : HI; dunque AC : FH :: CD : HI. Ma si è già veduto che l'angolo ACD=FHI; dunque i triangoli ACD, FHI hanno un angolo uguale compreso fra lati proporzionali; dunque son simili. Si può continuare medesimamente a

dimostrar la similitudine dei triangoli seguenti, qualunque sia il numero dei lati dei poligoni proposti; dunque due poligoni simili sono composti d'un medesimo numero di triangoli simili, e similmente disposti.

Scolio. La proposizione inversa è ugualmente vera: *se due poligoni sono composti d'un medesimo numero di triangoli simili, e similmente disposti, i due poligoni saranno simili.*

Poichè la similitudine dei triangoli respettivi darà l'angolo ABC=FGH, BCA=GHF, ACD=FHI; dunque BCD=GHI; così pure CDE=HIK, ec. Di più si avrà AB : FG :: BC : GH :: AC : FH :: CD : HI, ec. Dunque i due poligoni hanno gli angoli uguali, ed i lati proporzionali; dunque son simili.

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA

I contorni, o perimetri de' poligoni simili stanno come i lati omologhi, e le loro superficie come i quadrati dei lati omologhi stessi.

Poichè 1.° avendosi, per la natura delle figure simili, AB : FG :: BC : GH :: CD : HI ec., si può conchiudere da questa serie di rapporti uguali che la somma degli antecedenti AB+BC+CD ec., contorno della prima figura, stà alla somma de' conseguenti FG+GH+HI ec., contorno della seconda figura, come un'antecedente stà al Fig. 129.

suo conseguente, ovvero come un solo lato AB stà al suo omologo FG.

2.° Poichè i triangoli ABC, FGH sono si-

* P. 25. mili, si ha * ABC : FGH :: $\overline{AC}^2$: $\overline{FH}^2$; parimente, essendo simili i triangoli ACD, FHI, si ha ACD : FHI :: $\overline{AC}^2$: $\overline{FH}^2$; dunque, a motivo del rapporto comune $\overline{AC}^2$: $\overline{FH}^2$, si ha

ABC : FGH :: ACD : FHI.

Con un ragionamento simile si troverebbe

ACD : FHI :: ADE : FIK.

E così in seguito, se vi fosse un maggior numero di triangoli. Da questa serie di rapporti uguali si conchiuderà che la somma degli antecedenti ABC+ACD+ADE, o l'area del poligono ABCDE, stà alla somma dei conseguenti FGH+FHI+FIK, o all'area del poligono FGHIK, come un antecedente ABC stà al suo conseguente FGH, o come $\overline{AB}^2$ sta a $\overline{FG}^2$; dunque le superficie dei poligoni simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi.

Corollario. Se si costruiscono tre figure simili, i di cui lati omologhi siano uguali ai tre lati d'un triangolo rettangolo, l'area della figura fatta sul maggior lato sarà uguale alla somma delle aree delle altre due. Poichè queste tre figure sono proporzionali ai quadrati dei loro lati omologhi; ora il quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati; dunque ec.

PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA

Le parti di due corde AB, CD, *che si tagliano dentro un circolo sono reciprocamente proporzionali; cioè si ha* Fig. 130.

AO : DO : : CO : OB.

Tirate AC e BD: nei triangoli ACO, BOD gli angoli in O sono uguali, come opposti al vertice; l'angolo A è uguale all'angolo D, perchè sono iscritti nel medesimo segmento del circolo *; per la medesima ragione l'angolo C=B; dunque questi triangoli sono simili, ed i lati omologhi danno la proporzione. * 18, 2.

AO : DO : : CO : OB.

Corollario. Dunque AO×OB=DO×CO; dunque il rettangolo delle due parti d'una delle corde è uguale al rettangolo delle due parti dell'altra.

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA

Se da uno stesso punto O *preso fuori del cerchio si conducono le secanti* OB, OC, *terminate all'arco concavo* BC, *le secanti intere saranno reciprocamente proporzionali alle loro parti esterne, cioè si avrà* Fig. 131.

OB : OC : : OD : OA.

Poichè, tirando AC e BD, i triangoli OAC, OBD hanno l'angolo O comune; di più l'angolo B=C *; dunque questi triangoli sono simili, e i lati omologhi danno la proporzione * 18, 2.

OB : OC : : OD : OA.

Corollario. Dunque il rettangolo OA×OB è uguale al rettangolo OC×OD.

Scolio. Si può osservare che questa proporzione ha molta analogia colla precedente, e che ne differisce soltanto perchè le due corde AB, CD, in vece di tagliarsi dentro del cerchio, si tagliano al di fuori. La proposizione seguente può ancora esser riguardata come un caso particolare di questa.

PROPOSIZIONE XXX.

TEOREMA

Fig. 132. *Se da uno stesso punto* O *preso fuori del circolo si conduce la tangente* OA, *e la secante* OC, *la tangente sarà media proporzionale fra la secante, e la sua parte esterna; talmente che si avrà* OC : OA :: OA : OD; *o, il che torna lo stesso,* $\overline{OA}^2 = OC \times OD$.

Poichè, tirando AD, ed AC, i triangoli OAD, OAC hanno l'angolo O comune; di più l'angolo OAD formato da una tangente e da una corda * ha per misura la metà dell'arco AD, e l'angolo C ha la medesima misura; dunque l'angolo OAD=C; dunque i due triangoli sono simili, e si ha la proporzione OC : OA :: OA : OD, che dà $\overline{OA}^2 = OC \times OD$.

* 19, 2.

PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA

Fig. 133. *In un triangolo* ABC, *se si divide l'angolo* A *in due parti uguali colla retta* AD,

il rettangolo dei lati AB, AC *sarà uguale al rettangolo dei segmenti* BD, DC, *più il quadrato della secante* AD.

Fate passare una circonferenza per i tre punti A, B, C; prolungate AD fino alla stessa circonferenza, e tirate CE.

Il triangolo BAD è simile al triangolo EAC; poichè, per supposizione, l'angolo BAD= EAC; di più l'angolo B=E, avendo ambedue per misura la metà dell'arco AC; dunque questi triangoli sono simili, ed i lati omologhi danno la proporzione BA : AE :: AD : AC. Quindi resulta BA×AC=AE×AD; ma AE=AD+DE, e, moltiplicando da ambe le parti per AD, si ha AE×AD=$\overline{AD}^2$+AD× DE; d'altronde AD×DE=BD×DC*; dun- * Pr. 28.
que finalmente

$$BA \times AC = \overline{AD}^2 + BD \times DC.$$

PROPOSIZIONE XXXII.

TEOREMA

In un triangolo ABC *il rettangolo dei due lati* AB, AC *è uguale al rettangolo compreso dal diametro* CE *del circolo circoscritto, e dalla perpendicolare* AD *abbassata sul terzo lato* BC. Fig. 134.

Poichè, tirando AE, i triangoli ABD, AEC sono rettangoli, l'uno in D, l'altro in A; di più l'angolo B=E; dunque questi triangoli sono simili, e danno la proporzione AB : CE :: AD : AC; donde resulta AB×AC= CE×AD.

Corollario. Se si moltiplicano queste quan-

tità uguali per la medesima quantità BC, si avrà AB×AC×BC=CE×AD×BC. Ora AD×BC è il doppio della superficie del
* Pr. 4. triangolo *; dunque *il prodotto dei tre lati d'un triangolo è uguale alla sua superficie moltiplicata per il doppio del diametro del circolo circoscritto.*

Il prodotto di tre linee si chiama talora un *solido*, per una ragione che si vedrà in seguito. Il suo valore facilmente si concepisce immaginando che le linee siano ridotte in numeri, e moltiplicando i numeri, di cui si tratta.

Scolio. Si può dimostrar pure che *la superficie d'un triangolo è uguale al suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del circolo iscritto.*

Fig. 87. Poichè i triangoli AOB, BOC, AOC, che hanno il loro vertice comune in O, han per altezza comune il raggio del circolo iscritto; dunque la somma di questi triangoli sarà uguale alla somma delle basi AB, BC, AC moltiplicata per la metà del raggio OD; dunque il triangolo ABC è uguale al suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del circolo iscritto.

PROPOSIZIONE XXXIII.

TEOREMA

Fig. 135. *In ogni quadrilatero iscritto nel circolo, come* ABCD, *il rettangolo delle due diagonali* AC, BD *è uguale alla somma dei rettangoli dei lati opposti; talmente che si ha*

AC×BD=AB×CD+AD×BC.

Prendete l'arco CO=AD, e tirate BO, che incontri la diagonale AC in I.

L'angolo ABD=CBI, poichè l'uno ha per misura la metà di AD, e l'altro la metà di CO uguale ad AD. L'angolo ADB=BCI, perchè sono iscritti nel medesimo circolare segmento AOB; dunque il triangolo ABD è simile al triangolo IBC, e si ha la proporzione AD : CI :: BD : BC; donde resulta AD×BC=CI×BD. Dico adesso che il triangolo ABI è simile al triangolo BDC, perchè essendo l'arco AD uguale a CO, se si aggiunge da ambe le parti OD, si avrà l'arco AO=DC; dunque l'angolo ABI=DBC: di più l'angolo BAI=BDC, essendo iscritti nel segmento medesimo; dunque i triangoli ABI, DBC sono simili, ed i lati omologhi danno la proporzione AB : BD :: AI : CD; donde resulta AB×CD=AI×BD.

Aggiungendo i due resultati trovati, e osservando che AI×BD+CI×BD=(AI+CI) BD=AC×BD, si avrà AD×BC+AB× CD=AC×BD.

Scolio Si può dimostrare nella stessa maniera un altro teorema sul quadrilatero iscritto. Il triangolo ABD simile a BIC dà pure la proporzione BD : BC :: AB : BI, donde resulta BI×BD=BC×AB. Se si tira CO, il triangolo ICO simile ad ABI sarà simile a BDC, e darà la proporzione BD : CO :: DC : OI, donde resulta OI×BD=CO×DC, o, a cagione di CO=AD, OI×BD=AD× DC; aggiungendo i due resultati, e osser-

vando che BI×BD+OI×BD si riduce a BO×BD, si avrà

$$BO \times BD = AB \times BC + AD \times DC.$$

Se si fosse preso BP=AD, e si fosse tirata CKP, si avrebbe trovato con dei ragionamenti simili

$$CP \times CA = AB \times AD + BC \times CD.$$

Ma essendo l'arco BP uguale a CO, se si aggiunge BC ad ambedue, si avrà l'arco CBP=BCO; dunque la corda CP è uguale alla corda BO, e per conseguenza i rettangoli BO×BD, e CP×CA stanno fra loro come BD stà a CA; dunque

$$BD : CA :: AB \times BC + AD \times DC : AD \times AB + BC \times CD.$$

Dunque *le due diagonali d'un quadrilatero iscritto stanno fra loro come la somma dei rettangoli dei lati adjacenti alle loro estremità.*

Questi due teoremi posson servire per trovare le diagonali quando si conoscono i lati.

PROPOSIZIONE XXXIV.

TEOREMA

Fig. 136. *Sia* P *un punto dato dentro il circolo sul raggio* AC, *e sia preso un punto* Q *al di fuori sul prolungamento dello stesso raggio, talmente che si abbia* CP : CA :: CA : CQ; *se da un punto qualunque* M *della circonferenza si conducano ai due punti* P, *e* Q *le rette* MP, MQ, *dico che queste rette staranno per tutto nel medesimo rapporto, e che si avrà sempre* MP : MQ :: AP : AQ.

Poichè si ha per supposizione CP : CA :: CA : CQ, mettendo CM in vece di CA, si avrà CP : CM :: CM : CQ; dunque i triangoli CPM, CQM hanno un angolo uguale C compreso fra lati proporzionali *; dunque son simili; dunque il terzo lato MP stà al terzo MQ come CP stà a CM, o CA. Ma la proporzione CP : CA :: CA : CQ dà, *dividendo*, CP : CA : CA—CP : CQ—CA, o CP : CA :: AP : AQ; dunque MP : MQ :: AP : AQ.

* 20, 3.

PROBLEMI ANNESSI AL LIBRO TERZO.

PROBLEMA I.

Dividere una linea retta data in quante parti uguali si voglia, o in parti proporzionali a delle linee date.

1.° Sia proposto di dividere la linea AB in cinque parti uguali; per l'estremità A si condurrà l'indefinita AG, e, prendendo AC d'una grandezza qualunque, si porterà AC cinque volte sopra AG. Si unirà l'ultimo punto di divisione G, e l'estremità B colla linea retta GB; poi si condurrà CI paralella a GB; dico che AI sarà la quinta parte della linea AB, e che, portando AI cinque volte sopra AB, la linea AB sarà divisa in cinque parti uguali. Fig. 137.

Poichè, siccome CI è paralella a GB, i lati AG, AB sono tagliati proporzionalmente in C, ed I. Ma AC è la quinta parte di AG; dunque AI è la quinta parte di AB.

2.° Sia proposto di dividere la linea AB Fig. 138.

in parti proporzionali alle linee rette date P, Q, R. Dall' estremità A si tirerà l' indefinita AG; si prenderanno AC=P, CD=Q, DE=R; si uniranno l' estremità E, e B, e per i punti C, e D si condurranno CI, DK paralelle ad EB; dico che la linea AB sarà divisa in parti AI, IK, KB proporzionali alle linee date P, Q, R.

Poichè, a motivo delle paralelle CI, DK, EB, le parti AI, IK, KB son proporzionali alle parti AC, CD, DE*; e, per costruzione, queste ultime sono uguali alle linee date P, Q, R.

* Pr. 15.

PROBLEMA II.

Trovare una quarta proporzionale a tre rette date A, B, C.

Fig. 139. Tirate le due rette indefinite DE, DF sotto un angolo qualunque. Sopra DE prendete DA=A, e DB=B; sopra DF prendete DC=C: tirate AC; e per il punto B conducete BX paralella ad AC; dico che DX sarà la quarta proporzionale cercata. Poichè, siccome BX è paralella ad AC, si ha la proporzione DA : DB :: DC : DX; ora i tre primi termini di questa proporzione sono uguali alle tre linee date; dunque DX è la quarta proporzionale richiesta.

Corollario. Si troverà similmente una terza proporzionale alle due linee date A, B; poichè essa sarà la stessa che la quarta proporzionale alle tre linee A, B, B.

PROBLEMA III.

Trovare una media proporzionale fra due rette date A *e* B. Fig. 140.

Sopra una retta indefinita DF prendete DE=A, ed EF=B; sopra la linea totale DF, come diametro, descrivete la mezza-circonferenza DGF; al punto E alzate sul diametro la perpendicolare EG, che incontri la circonferenza in G; dico che EG sarà la media proporzionale richiesta.

Poichè la perpendicolare GE abbassata da un punto della circonferenza sul diametro è media proporzionale fra i due segmenti del diametro DE, EF*: or questi segmenti sono uguali alle linee date A, e B. * Pr. 23.

PROBLEMA IV.

Dividere la linea data AB *in due parti di maniera che la maggiore sia media proporzionale tra la linea intera, e l'altra parte che resta.* Fig. 141.

All' estremità B della linea AB alzate la perpendicolare BC uguale alla metà di AB; dal punto C, come centro, e col raggio CB descrivete una circonferenza; tirate AC, che taglierà la circonferenza in D, e prendete AF=AD; dico che la linea AB sarà divisa nel punto F della maniera richiesta, cioè, in guisa tale che starà AB : AF :: AF : FB.

Poichè, essendo AB perpendicolare all' estremità del raggio CB, dessa è una tangente; e se si prolunga AC finchè incontri di

* Pr. 30. nuovo la circonferenza in E, si avrà * AE : AB :: AB : AD; dunque, *dividendo*, AE—AB : AB :: AB—AD : AD. Ma poichè il raggio BC è la metà di AB, il diametro DE è uguale ad AB, e per conseguenza AE—AD=AD=AF; si ha pure a motivo di AF=AD, AB—AD=FB; dunque AF : AB :: FB : AD, o AF; dunque, *invertendo*, AB : AF :: AF : FB.

AB

Scolio. Questo modo di divisione della retta AB si chiama divisione in *estrema, e media ragione*. Se ne vedranno degli usi. Si può frattanto osservare che la secante AE è divisa in *estrema, e media ragione* nel punto A; poichè AE : DE :: DE : AD.

PROBLEMA V.

Fig. 142. *Per un punto* A *dato dentro dell' angolo dato* BCD *tirare la linea retta* BD *in maniera che le parti* AB, AD *comprese tra il punto* A, *ed i due lati dell' angolo, siano uguali*.

Per il punto A conducete AE paralella a CD; prendete BE=CE; e per i punti B, ed A tirate BAD, che sarà la linea cercata.

Poichè, essendo AE paralella a CD, si ha BE : EC :: BA : AD. Ora BE=EC; dunque BA=AD.

PROBLEMA VI.

Fare un quadrato equivalente ad un paralellogrammo, o a un triangolo dato.

Fig. 143. 1.° Sia ABCD il paralellogrammo dato,

AB la sua base, DE la sua altezza. Fra AB, e DE cercate una media proporzionale XY *; dico che il quadrato fatto sopra XY sarà equivalente al paralellogrammo ABCD. Poichè, per costruzione, AB : XY :: XY : DE; dunque $\overline{XY}^2 = AB \times DE$. Ora AB×DE è la misura del paralellogrammo, e $\overline{XY}^2$ quella del quadrato; dunque sono equivalenti. * Pr.

2.° Sia ABC il triangolo dato, BC la sua base, AD la sua altezza. Prendete una media proporzionale fra BC, e la metà di AD, e sia XY questa media: dico che il quadrato fatto sopra XY sarà equivalente al triangolo ABC. Fig. 144.

Poichè, siccome si ha BC : XY :: XY : $\frac{1}{2}$ AD, ne risulta $\overline{XY}^2 = BC \times \frac{1}{2} AD$; dunque il quadrato fatto sopra XY è equivalente al triangolo ABC.

PROBLEMA VII.

Fare sulla linea data AD *un rettangolo* ADEX *equivalente al rettangolo dato* ABFC. Fig. 145.

Cercate una quarta proporzionale alle tre linee AD, AB, AC, e sia AX questa quarta proporzionale; dico che il rettangolo fatto sopra AD, e AX sarà equivalente al rettangolo ABFC.

Poichè, siccome si ha AD : AB :: AC : AX, ne risulta AD×AX=AB×AC; dunque il rettangolo ADEX è equivalente al rettangolo ABFC.

PROBLEMA VIII.

Fig. 148. *Trovare in linee il rapporto del rettangolo delle due linee date* A *e* B *al rettangolo delle due linee date* C *e* D.

Sia X una quarta proporzionale alle tre linee B, C, D; dico che il rapporto delle due linee A, e X sarà uguale a quello dei due rettangoli A×B, C×D.

Poichè, siccome si ha B : C :: D : X, ne risulta C×D=B×X; dunque A×B : C×D :: A×B : B×X :: A : X.

Corollario. Dunque, per avere il rapporto dei quadrati fatti sopra le linee date A, e C, cercate una terza proporzionale X alle linee A e C, talmente che si abbia A : C :: C : X; e voi avrete $A^2 : C^2 :: A : X$.

PROBLEMA IX.

Fig. 149. *Trovare in linee il rapporto del prodotto delle tre linee date* A, B, C *al prodotto delle tre linee date* P, Q, R.

Alle tre linee date P, A, B, cercate una quarta proporzionale X; alle tre linee date C, Q, R cercate parimente una quarta proporzionale Y. Le due linee X, Y staranno fra loro come i prodotti A×B×C, P×Q×R.

Poichè, siccome P : A :: B : X, si ha A×B=P×X; e moltiplicando da ambe le parti per C, A×B×C=C×P×X. Similmente, siccome C : Q :: R : Y, ne resulta Q×R=C×Y; e moltiplicando da ambe le parti per P, si ha P×Q×R=P×C×Y. Dunque il pro-

dotto A×B×C stà al prodotto P×Q×R come C×P×X stà a P×C×Y, o come X stà a Y.

PROBLEMA X.

Cangiare un poligono dato in un triangolo equivalente.

Sia ABCDE il poligono dato. Tirate pri- Fig. 146.
mieramente la diagonale CE, che taglia dal poligono il triangolo CDE; per il punto D conducete DF paralella a CE finchè incontri AE prolungata; tirate CF; ed il poligono ABCDE sarà equivalente al poligono ABCF, che ha un lato di meno.

Poichè i triangoli CDE, CFE hanno la base comune CE; essi hanno pure la medesima altezza perchè i loro vertici D, F sono sopra una linea DF paralella alla base; dunque questi triangoli sono equivalenti. Aggiungiamo ad ambedue la figura ABCE, si avrà da una parte il poligono ABCDE, e dall'altra il poligono ABCF, che saranno perciò equivalenti.

Si può far l'istesso dalla parte dell'angolo B sostituendo al triangolo ABC il triangolo equivalente AGC; e così il pentagono ABCDE sarà cangiato in un triangolo equivalente GCF.

Lo stesso metodo si applicherà ad ogni altra rettilinea figura; poichè, diminuendo ad uno per volta il numero dei lati, si terminerà col trovare il triangolo equivalente.

Corollario. E perchè ogni triangolo può esser cangiato in un quadrato equivalente,

ne segue che si troverà sempre un quadrato equivalente ad una figura rettilinea data. Ciò si chiama *quadrare* la figura rettilinea, o trovarne la *quadratura*.

Il problema della *quadratura del circolo* consiste a trovare un quadrato equivalente ad un circolo, di cui sia dato il diametro.

PROBLEMA XI.

Fare un quadrato, che sia uguale alla somma, o alla differenza di due quadrati dati.

Fig. 147. Siano A, e B i lati dei quadrati dati.

1.° Se bisogna trovare un quadrato uguale alla somma di quei quadrati, tirate le due linee rette indefinite ED, EF poste ad angolo retto; prendete ED=A, ed EG=B; conducete DG; e DG sarà il lato del quadrato cercato.

Poichè, essendo il triangolo DEG rettangolo, il quadrato fatto sopra DG è uguale alla somma dei quadrati fatti sopra ED, ed EG.

2.° Se bisogna trovare un quadrato uguale alla differenza di quei quadrati, formate parimente l'angolo retto FEH; prendete GE uguale al minore dei lati A, e B; dal punto G, come centro, e con un raggio GH uguale all'altro lato, descrivete un arco, che tagli EH in H: dico che il quadrato fatto sopra EH sarà uguale alla differenza dei quadrati fatti sopra le rette A, e B.

Poichè il triangolo GEH è rettangolo,

l' ipotenusa GH=A, ed il lato GE=B; dunque il quadrato fatto sopra EH ec.

Scolio. Si può trovare ancora un quadrato uguale alla somma di quanti quadrati si vorrà; poichè, siccome se ne riducono due ad un solo, se ne ridurranno tre a due, e questi due ad uno, e così degli altri. Sarebbe lo stesso se alcuno dei quadrati dovesse esser sottratto dalla somma degli altri.

PROBLEMA XII.

Costruire un quadrato, che stia al quadrato dato ABCD *come la linea* M *stà alla linea* N. Fig. 150.

Sopra la linea retta indefinita EG prendete EF=M, e FG=N; sopra EG, come diametro, descrivete una mezza circonferenza, ed al punto F alzate sul diametro la perpendicolare FH. Dal punto H conducete le corde HG, HE, che prolungherete indefinitamente; sulla prima prendete HK uguale al lato AB del quadrato dato, e per il punto K conducete KI paralella ad EG; dico che HI sarà il lato del quadrato richiesto.

Poichè, a motivo delle paralelle KI, GE, si ha HI : HK :: HE : HG; o $\overline{HI}^2 : \overline{HK}^2 :: \overline{HE}^2 : \overline{HG}^2$; ma nel triangolo rettangolo EHG* il quadrato di HE stà al quadrato di HG come il segmento EF stà al segmento FG, o come M stà ad N; dunque $\overline{HI}^2 : \overline{HK}^2 :: M : N$. Ma HK=AB; dunque il quadrato fatto so- * 23.

pra HI stà al quadrato fatto sopra AB come M stà a N.

PROBLEMA XIII.

Fig. 129. *Sul lato* FG *omologo ad* AB *descrivere un poligono simile al poligono* ABCDE.

Nel poligono dato tirate le diagonali AC, AD. Al punto F fate l'angolo GFH=BAC, ed al punto G l'angolo FGH=ABC; le linee rette FH, GH si taglieranno in H, e FGH sarà un triangolo simile ad ABC: parimente, sopra FH, omologo ad AC, descrivete il triangolo FIH simile ad ADC, e sopra FI, omologo ad AD, descrivete il triangolo FIK simile ad ADE. Il poligono FGHIK sarà il poligono richiesto, cioè simile ad ABCDE.

Poichè questi due poligoni son composti d'un medesimo numero di triangoli simili, e
* 26, similmente posti *.

PROBLEMA XIV.

Essendo date due figure simili, costruire una figura simile uguale alla loro somma, o alla lor differenza.

Siano A, e B due lati omologhi delle figure date; cercate un quadrato uguale alla somma, o alla differenza dei quadrati fatti sopra A, e B; sia X il lato di questo quadrato; X sarà nella figura cercata il lato omologo ad A, e B respettivamente nelle date figure. Si costruirà in seguito questa figura per il precedente teorema.

Poichè le figure simili stanno come i quadrati dei lati omologhi; ora il quadrato del lato X è uguale alla somma, o alla differenza dei quadrati fatti sui lati omologhi A, e B; dunque la figura fatta sul lato X è uguale alla somma, o alla differenza delle figure simili fatte sui lati A, e B.

PROBLEMA XV.

Costruire una figura simile ad una figura data, e che stia a questa figura nel rapporto dato di M *a* N.

Sia A un lato della figura data, X il lato omologo nella figura cercata; bisognerà che il quadrato di X stia al quadrato di A come M stà a N. Si troverà dunque X per il problema XII. conoscendo X; e si compirà il resto per il problema XIII.

PROBLEMA XVI.

Costruire una figura simile alla figura P, *ed equivalente alla figura* Q. Fig. 151.

Cercate il lato M del quadrato equivalente alla figura P, ed il lato N del quadrato equivalente alla figura Q. Sia quindi X una quarta proporzionale alle tre linee rette date M, N, AB; sul lato X, omologo ad AB, descrivete una figura simile alla figura P; dico che sarà ancora equivalente alla figura Q.

Poichè, chiamando Y la figura fatta sul lato X, si avrà, $P : Y :: \overline{AB}^2 : X^2$; ma, per

costruzione, AB : X :: M : N, o $\overline{AB}^2 : X^2 :: M^2 : N^2$; dunque P : Y :: M^2 : N^2. Oltracciò si ha pure, per costruzione, $M^2 = P$, e $N^2 = Q$; dunque P : Y :: P : Q; dunque Y = Q; dunque la figura Y è simile alla figura P, ed equivalente alla figura Q.

PROBLEMA XVII.

Fig. 152. *Costruire un rettangolo equivalente a un quadrato dato* C, *e i di cui lati adjacenti facciano una somma data* AB.

Sopra AB, come diametro, descrivete una mezza-circonferenza; conducete paralellamente al diametro la retta DE ad una distanza AD uguale al lato del quadrato dato C.

Dal punto E, ove la paralella taglia la circonferenza, abbassate sul diametro la perpendicolare EF; dico che AF, e FB saranno i lati del cercato rettangolo.

Poichè la loro somma è uguale ad AB, ed il loro rettangolo AF×FB è uguale al
* 23. quadrato di EF *, o al quadrato di AD; dunque questo rettangolo è equivalente al quadrato dato C.

Scolio. Bisogna, affinchè il problema sia possibile, che la distanza AD non superi il raggio, o che il lato del qnadrato C non superi la metà della linea AB.

PROBLEMA XVIII.

Costruire un rettangolo equivalente a un quadrato C; *e i cui lati adjacenti abbiano fra di loro la differenza data* AB. Fig. 153.

Sulla linea retta data AB, come diametro, descrivete una circonferenza; all'estremità del diametro conducete la tangente AD uguale al lato del quadrato C. Per il punto D, ed il centro O tirate la secante DE; dico che DE, e DF saranno i lati adjacenti del richiesto rettangolo.

Poichè 1.° la differenza di questi lati è uguale al diametro EF, o AB; 2.° il rettangolo DE×DF è uguale ad $\overline{AD}^2$ *; dunque il rettangolo sarà equivalente al quadrato dato C. * 3o.

PROBLEMA XIX.

Trovare la misura comune, se ve n'è alcuna, tra la diagonale, ed il lato del quadrato

Sia ABCG un quadrato qualunque, AC la sua diagonale. Fig. 154.

Bisogna primieramente portare CB sopra CA quante volte può esservi contenuto, * e perciò sia descritto col centro C, e col raggio CB il mezzo-circolo DBE; si vede che CB è contenuto una volta in AC col resto AD; il resultato della prima operazione è dunque il quoziente 1 col resto AD, che bisogna paragonar con CB, o col suo uguale AB. * Pr. 17., lib. 2.

Si può prendere AF=AD, e portare difatto AF sopra AB; si troverebbe che vi è contenuto due volte con un resto; ma siccome questo resto, ed i seguenti vanno diminuendo, e ben presto ci sfuggirebbero per la lor piccolezza, questo non sarebbe che un mezzo meccanico imperfetto, donde non si potrebbe conchiuder niente per decidere se le linee rette AC, CB hanno fra loro, o non hanno una misura comune. Ora v'è un mezzo semplicissimo di scansare le linee decrescenti, e di operare soltanto sopra linee, che siano sempre della medesima grandezza.

In fatti, essendo l'angolo ABC retto, AB è una tangente, ed AE una secante condotta
* 30. dal medesimo punto; talmente che si ha * AD : AB :: AB : AE. Onde nella seconda operazione, che consiste a paragonare AD con AB, si può, in vece del rapporto di AD ad AB, sostituir quello di AB ad AE: ora AB, o la sua uguale CD è contenuta due volte in AE col resto AD; dunque il resultato della seconda operazione è il quoziente 2 col resto AD, che bisogna paragonare ad AB.

La terza operazione, che consiste a paragonare AD con AB, si ridurrà parimente a paragonare AB, o la sua eguale CD con AE; e si avrà del pari 2 per quoziente, ed AD per resto.

Di quì resulta che l'operazione non avrà fine, e che perciò non v'è alcuna misura comune fra la diagonale, ed il lato del qua-

drato; verità, ch'era già cognita per mezzo dell' Aritmetica (giacchè queste due linee stanno fra loro come $\sqrt{2} : 1$) *, ma che acquista un maggior grado di chiarezza colla risoluzione geometrica. * 11.

Scolio. Non è dunque possibile di trovare il rapporto esatto in numeri della diagonale al lato del quadrato; ma vi si può accostare quanto si vorrà col mezzo della frazione *continua*, che è uguale a questo rapporto. La prima operazione ha dato per quoziente 1; la seconda, e tutte le altre all'infinito danno 2; onde la frazione, di cui si tratta, è $1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}$, ec. all'infinito.

Per esempio, se si calcola questa frazione fino al quarto termine inclusivamente, si trova che il suo valore è $1\frac{12}{29}$, o $\frac{41}{29}$; talmente che il rapporto prossimo della diagonale al lato del quadrato è come $41 : 29$. Si troverebbe un rapporto più prossimo calcolando un maggior numero di termini.

LIBRO QUARTO

I POLIGONI REGOLARI E LA MISURA DEL CIRCOLO

DEFINIZIONE

Un poligono, che è nel tempo stesso equiangolo, ed equilatero, si chiama *poligono regolare*.

Vi son dei poligoni regolari di qualunque numero di lati. Il triangolo equilatero è il poligono regolare di tre lati, ed il quadrato quello di quattro.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA

Due poligoni regolari d'un medesimo numero di lati sono due figure simili.

Fig. 155. Sian per esempio i due esagoni regolari ABCDEF, *abcdef;* la somma degli angoli è la stessa nell'una, e nell'altra figura; essa * 21,1. è uguale ad otto angoli retti *. L'angolo A è la sesta parte di questa somma, ugualmente che l'angolo *a*; dunque i due angoli A, ed *a* sono uguali; ed è lo stesso per conseguenza degli angoli B, e *b*, C, e *c*, ec.

Di più, poichè per la natura di questi poligoni i lati AB, BC, CD, ec. sono uguali, come pure *ab*, *bc*, *cd*, ec., è chiaro che si hanno le proporzioni AB : *ab*, :: BC : *bc* :: CD : *cd*, ec.; dunque le due figure, di cui si tratta, hanno gli angoli uguali, ed i lati omologhi proporzionali; dunque son simili *. * Def. 2. L. III.

Corollario. Dunque i perimetri di due poligoni regolari d'un medesimo numero di lati stanno fra loro come i lati omologhi, e le loro superficie come i quadrati di questi lati *. * 27,2.

Scolio. L'angolo d'un poligono regolare si determina per mezzo del numero dei suoi lati, come quello d'un poligono equiangolo. *Vedete la Prop. XXI. del Lib. I.*

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA

Ogni poligono regolare può essere iscritto, e circoscritto al circolo.

Sia ABCDE ec. il poligono, di cui si tratta; imaginate che si faccia passare (come si può sempre) * una circonferenza per i tre punti A, B, C; sia O il di lei centro, ed OP la perpendicolare abbassata sul mezzo del lato BC; tirate AO, e OD. Fig. 156. * 7,2.

Il quadrilatero OPCD, ed il quadrilatero OPBA possono essere sopraposti, e combaciano: infatti il lato OP è comune, l'angolo OPC=OPB, poichè sono retti; dunque il lato PC si applicherà sul suo uguale PB, ed il punto C cadrà in B. Di più, per la

natura del poligono, l'angolo PCD=PBA; dunque CD prenderà la direzione BA; e poichè CD=AB, il punto D cadrà in A, e i due quadrilateri coincideranno intieramente l'uno coll'altro. La distanza OD è dunque uguale ad AO, e per conseguenza la circonferenza, che passa per i tre punti A, B, C, passerà anche per il punto D; ma, con un ragionamento simile, si proverà che la circonferenza, che passa per i tre vertici B, C, D, passerà ancora per il vertice dell'angolo susseguente E; e così di seguito: dunque la medesima circonferenza, che passa per i punti A, B, C, passa per tutti i vertici degli angoli del poligono, ed il poligono resterà iscritto in questa circonferenza.

In secondo luogo, per rapporto a questa circonferenza, tutti i lati AB, BC, CD ec. son corde uguali; esse son dunque ugual-
* 3,2. mente distanti dal centro *; dunque, se dal punto O, come centro, e col raggio OP si descriva una circonferenza, questa circonferenza toccherà il lato BC, e tutti gli altri lati del poligono nel loro punto di mezzo, e la circonferenza sarà iscritta nel poligono, o il poligono circoscritto alla circonferenza medesima.

Scolio I. Il punto O, centro comune del circolo iscritto, e del circolo circoscritto, può essere riguardato pure come il centro del poligono; e per questa ragione si chiama *angolo al centro* l'angolo AOB formato dai due raggi condotti alle estremità d'un me-

desimo lato AB. Poichè tutte le corde AB, BC, ec. sono uguali, è chiaro che tutti gli angoli al centro son parimente uguali, e che perciò il valor di ciascuno si trova dividendo quattro angoli retti per il numero dei lati del poligono.

Scolio II. Per iscrivere un poligono regolare d'un certo numero di lati in una circonferenza data si tratta soltanto di dividere la circonferenza in tante parti uguali, quanti lati dee avere il poligono; poichè, essendo uguali gli archi, le corde AB, BC, CD, ec. saranno uguali; i triangoli ABO, BOC, COD, ec. saranno pure uguali, perchè sono equilateri fra di loro; dunque tutti gli angoli ABC, BCD, CDE, ec. saranno uguali; dunque la figura ABCDE ec. è un poligono regolare. Fig. 158.

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA

Iscrivere un quadrato in una circonferenza data.

Tirate due diametri AC, BD, che si taglino ad angoli retti; unite le estremità A, B, C, D; e la figura ABCD sarà il quadrato iscritto: poichè, essendo uguali gli angoli AOB, BOC, ec., le corde AB, BC, ec. sono uguali. Fig. 157.

Scolio. Essendo il triangolo BOC rettangolo, ed isoscele, si ha * BC : BO :: $\sqrt{2}$: 1; dunque *il lato del quadrato iscritto stà al* * 11,3.

raggio come la radice quadrata di 2 stà all' unità.

PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA

Iscrivere un esagono regolare, ed un triangolo equilatero in una data circonferenza.

Fig. 158. Supponiamo risoluto il problema, e sia AB un lato dell'esagono iscritto; se si conducono i raggi AO, OB, dico che il triangolo AOB sarà equilatero; perchè l'angolo AOB è la sesta parte di quattro angoli retti; e così, prendendo l'angolo retto per unità, si avrà $AOB=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$; i due altri angoli ABO, BAO del medesimo triangolo vagliono insieme $2-\frac{2}{3}$, ovvero $\frac{4}{3}$; e siccome sono uguali, ciascuno di essi $=\frac{1}{3}$; dunque il triangolo ABO è equilatero; dunque il lato dell'esagono iscritto è ugale al raggio.

Quindi resulta che s'iscriverà un esagono regolare in una circonferenza data portando il raggio sei volte sulla circonferenza, talchè si ritornerà sul punto stesso, donde si sarà cominciato.

Essendo iscritto l'esagono ABCDEF, se si uniscono i vertici degli angoli alternativamente con linee rette, si formerà il triangolo equilatero ACE.

Scolio. La figura ABCO è un paralellogrammo, ed anche un rombo, poichè AB=BC=CO=AO; dunque * la somma dei quadrati delle diagonali $\overline{AC}^2+\overline{BO}^2$ è ugnale alla

* 143.

somma dei quadrati de' lati, la quale è $4\overline{AB}^2$, o $4\overline{BO}^2$; togliendo da ambe le parti $\overline{BO}^2$, resterà $\overline{AC}^2 = 3\overline{BO}^2$; dunque $\overline{AC}^2 : \overline{BO}^2 :: 3 : 1$, ovvero $AC : BO :: \sqrt{3} : 1$; dunque *il lato del triangolo equilatero iscritto stà al raggio come la radice quadra di 3 stà all' unità.*

PROPOSIZIONE V.

PROBLEMA

Iscrivere in un circolo dato un decagono regolare, quindi un pentagono, ed un pentedecagono.

Dividete il raggio AO in *estrema, e media ragione* nel punto M *; prendete la corda AB uguale al segmento maggiore OM; ed AB sarà il lato del decagono regolare, che bisognerà trasportar dieci volte sulla circonferenza. Fig. 158. * Pr. 4. lib. 3.

Poichè, tirando MB, si ha, per costruzione, $AO : OM :: OM : AM$, o sivvero, a motivo di $AB = OM$, $AO : AB :: AB : AM$; dunque i triangoli ABO, AMB hanno un angolo comune A compreso fra lati proporzionali; dunque son simili *. Il triangolo OAB è isoscele; dunque il triangolo AMB lo è pure; e si ha $AB = BM$; d'altronde $AB = OM$; dunque anche $MB = OM$; dunque il triangolo BMO è isoscele. * 20, 3.

L'angolo AMB esterno, per rapporto al triangolo isoscele BMO, è doppio dell'interno O *; ora l'angolo $AMB = MAB$; dunque il triangolo OAB è tale che ciascuno degli * 20, 1.

angoli alla base OAB, ossia OBA è doppio dell'angolo al vertice O; dunque i tre angoli insieme del triangolo equivalgono a cinque volte l'angolo O; e quindi l'angolo O è la quinta parte di due angoli retti, o la decima di quattro; dunque l'arco AB è la decima parte della circonferenza, e la corda AB è il lato del decagono regolare.

Corollario I. Se si uniscano di due in due i vertici degli angoli del decagono regolare, si formerà il pentagono regolare ACEGI.

Corollario II. Essendo sempre AB il lato del decagono, sia AL il lato dell'esagono; allora l'arco BL sarà per rapporto alla circonferenza $\frac{1}{6} - \frac{1}{10}$, ovvero $\frac{1}{15}$; dunque la corda BL sarà il lato del pentedecagono, o poligono regolare di 15 lati. Si vede nel tempo stesso che l'arco CL è la terza parte di CB.

Scolio. Essendo iscritto un poligono regolare, se si dividano gli archi sottesi dai suoi lati in due parti uguali, e si tirino le corde dei mezzi-archi, quelle formeranno un nuovo poligono regolare d'un doppio numero di lati. Così si vede che il quadrato può servire ad iscrivere successivamente dei poligoni regolari di 8, 16, 32, ec. lati. Del pari l'esagono servirà ad iscrivere dei poligoni regolari di 12, 24, 48, ec. lati; il decagono dei poligoni di 20, 40, 80, ec. lati; il pentedecagono dei poligoni di 30, 60, 120, ec. lati (1).

(1) Fino al presente si è creduto che questi poligoni fossero i soli, che potessero essere iscritti

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA

Essendo dato il poligono regolare iscritto Fig. 160
ABCD ***ec., circoscrivere alla stessa circonferenza un poligono simile.***

Al mezzo T dell'arco AB conducete la tangente GH, che sarà paralella ad AB *; fate la stessa cosa in mezzo agli altri archi BC, CD, ec; queste tangenti formeranno colle loro intersezioni il poligono regolare circoscritto GHIK, ec. simile al poligono iscritto. * 10, 2.

E facile di vedere primieramente che i tre punti O, B, H sono in linea retta, perchè i triangoli rettangoli OTH, OHN hanno l'ipotenusa comune OH, ed il lato OT=ON; dunque sono uguali *; dunque l'angolo TOH= HON; e per conseguenza la linea OH passa per il punto B mezzo dell'arco TN. Per la medesima ragione il punto I è sul prolungamento di OC, il punto K sul prolungamento di OD, ec. Ma, poichè GH è paralella ad * 18, 1.

---

per mezzo della Geometria elementare, o pure (ciò che è lo stesso) per mezzo della risoluzione dell'Equazioni del primo, e secondo grado. Ma un Geometra di Brunswick, nominato Carlo Fed. Gauss, ha provato in un'Opera intitolata *Disquisitiones arithmeticæ, Lipsiæ*, 1801. che si può iscrivere con dei simili mezzi il poligono regolare di diciassette lati, ed in generale quello di 2^n+1 lati, purchè 2^n+1 sia un numero *primo*.

* 28, 1. AB, e HI a BC, l'angolo GHI=ABC *; parimente HIK=BCD, ec.; dunque gli angoli del poligono circoscritto sono uguali agli angoli del poligono iscritto. Di più, a cagione delle medesime paralelle, si ha GH : AB :: OH : OB, e HI : BC :: OH : OB; dunque GH : AB :: HI : BC. Ma AB=BC; dunque GH=HI. Per la medesima ragione HI=IK, ec.; dunque i lati del poligono circoscritto sono uguali fra loro; dunque questo poligono è regolare, e simile al poligono iscritto.

Corollario I. Reciprocamente, se fosse dato il poligono circoscritto GHIK, ec., e che bisognasse costruir col suo mezzo il poligono iscritto ABC, ec., si vede chiaro che basterebbe condurre ai vertici G, H, I, ec. del poligono dato le linee OG, OH, ec., che incontrerebbero la circonferenza nei punti A, B, C, ec.; si unirebbero in seguito questi punti colle corde AB, BC, ec., che formerebbero il poligono iscritto. Si potrebbe pure, nel medesimo caso, unire semplicemente i punti di contatto T, N, P, ec. colle corde TN, NP, ec.; il che formerebbe ugualmente un poligono iscritto simile al circoscritto.

Corollario II Dunque si può circoscrivere ad un circolo dato tutti i poligoni regolari, che vi si sanno iscrivere, e viceversa.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA

La superficie d' un poligono regolare è uguale al suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del circo o iscritto.

Sia, per esempio, il poligono regolare GHIK. ec.: il triangolo GOH ha per misura GH$\times\frac{1}{2}$OT; il triangolo OHI ha per misura HI$\times\frac{1}{2}$ON: ma ON=OT; dunque i due triangoli riuniti hanno per misura (GH+HI) $\times\frac{1}{2}$OT. Continuando del pari gli altri triangoli, si vedrà che la somma di tutti i triangoli, o il poligono intero, ha per misura la somma delle basi GH, HI, IK, ec., o il perimetro del poligono moltiplicato per $\frac{1}{2}$OT, metà del raggio del circolo iscritto. Fig. 160.

Scolio. Il raggio del circolo iscritto OT non è altro che la perpendicolare abbassata dal centro sopra uno dei lati; si chiama talora l'*apotèma* del poligono.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA

I perimetri de' poligoni regolari d'un medesimo numero di lati stanno come i raggi dei circoli circoscritti, ed anche come i raggi dei circoli iscritti; le loro superficie poi stanno come i quadrati di questi medesimi raggi.

Sia AB un lato d'uno de' poligoni, di cui si tratta, O il suo centro, e per conseguenza OA il raggio del circolo circoscritto, ed OD perpendicolare sopra AB il raggio del cir- Fig. 161.

colo iscritto; sia parimente *ab* il lato d'un altro poligono simile, ovvero *o* il suo centro, *oa*, e *od* i raggi dei circoli circoscritto, ed iscritto. I perimetri dei due poligoni stanno fra loro come i lati AB, e *ab*. Ma gli angoli A, ed *a* sono uguali, essendo ciascuno la metà dell'angolo del poligono; è lo stesso degli angoli B, e *b*: dunque i triangoli ABO, *abo* sono simili, come pure i triangoli rettangoli ADO, *ado*; dunque AB : *ab* :: AO : *ao* :: DO : *do*; dunque i perimetri dei poligoni stanno fra loro come i raggi AO, *ao* de' circoli circoscritti, e parimente come i raggi, DO, *do* de' circoli iscritti.

Le superficie di questi medesimi poligoni stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi AB, *ab*; e per conseguenza stanno ancora come i quadrati dei raggi dei circoli circoscritti AO, *ao*, o come i quadrati dei raggi dei circoli iscritti OD, *od*.

PROPOSIZIONE IX.

LEMMA

Fig. 162. *Ogni linea curva, o poligona, che circonda da un' estremità all' altra la linea convessa* AMB, *è maggiore della linea circondata* AMB.

Abbiamo già detto che per linea *convessa* intendiamo una linea curva, o poligona, o in parte curva, ed in parte poligona, tale che una linea retta non possa tagliarla in più di due punti. Se la linea AMB avesse delle parti rientranti, o delle sinuosità, ces-

sarebbe d'esser convessa, perchè è facil vedere che una linea retta potrebbe tagliarla in più di due punti. Gli archi di circolo sono essenzialmente convessi; ma la proposizione, di cui trattasi adesso, s'estende ad una linea qualunque, che soddisfaccia alla condizione predetta.

Posto ciò, se la linea AMB non è minore di tutte quelle, che la circondano, esisterà fra queste una linea più corta di tutte le altre, la quale sarà minore di AMB, o al più uguale ad AMB. Sia ACDEB questa linea circondante; fra le due linee conducete, ove vorrete, la retta PQ, che non incontri la linea AMB, o che la tocchi soltanto. La retta PQ è minore di PCDEQ; dunque, se alla parte PCDEQ si sostituisce la linea retta PQ, si avrà la linea circondata APQB minore di APDQB. Ma, per supposizione, questa doveva esser la più corta di tutte; dunque questa supposizione non può sussistere; dunque tutte le linee circondanti sono più lunghe di AMB.

Scolio. Si dimostrerà assolutamente nella stessa maniera che una linea convessa, e rientrante in se stessa AMB è più corta d'ogni linea, che la circondasse da ogni parte; e ciò tanto se la linea circondante FHG tocca AMB in uno, o più punti, quanto se la circonda senza toccarla. Fig. 163.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA

Essendo date due circonferenze concentriche, si può sempre iscrivere nella maggiore un poligono regolare, i di cui lati non incontrino la minore, e si può pure circoscrivere alla minore un poligono regolare, i di cui lati non incontrino la maggiore. Così in ambedue i casi i lati del poligono descritto saranno racchiusi fra le due circonferenze.

Fig. 164. Siano CA, CB i raggi delle due circonferenze date. Per il punto A conducete la tangente DE terminata alla circonferenza maggiore in D, ed E. Iscrivete nella circonferenza maggiore uno dei poligoni regolarì, che si possono iscrivere per i teoremi precedenti; dividete quindi gli archi sottesi dai lati in due parti uguali; e conducete le corde dei mezzi-archi: nascerà un poligono regolare d'un doppio numero di lati. Continuate la bisezione degli archi finchè giungiate ad un arco minore di DBE. Sia MBN quest'arco, il cui punto di mezzo è supposto B; è chiaro che la corda MN sarà più lontana dal centro di DE, e che perciò il poligono regolare, di cui MN è lato, non può incontrare la circonferenza, di cui CA è il raggio.

Poste le medesime cose, tirate CM, e CN, che tagliano la tangente DE in P, e Q; PQ sarà il lato d'un poligono circoscritto alla circonferenza minore, simile al poligono iscritto nella maggiore, il cui lato è MN. Ora è

manifesto che il poligono circoscritto, che ha per lato PQ, non può arrivare alla circonferenza maggiore, poichè CP è minor di CM.

Dunque, colla medesima costruzione, si può descrivere un poligono regolare iscritto nella circonferenza maggiore, ed un poligono simile circoscritto alla minore, i di cui lati saranno compresi fra le due circonferenze.

Scolio. Se si hanno due settori concentrici FCG, ICH, si potrà similmente iscrivere nel maggiore una *porzione di poligono regolare*, o circoscrivere al minore una porzione di poligono simile, talmente che i contorni dei due poligoni siano compresi fra le due circonferenze: basterà dividere l'arco FBG successivamente in 2, 4, 8, 16, ec. parti uguali, finchè si arrivi a una parte minore di DBE.

Chiamiamo quì *porzione di poligono regolare* la figura, che risulta da una serie di corde uguali iscritte nell'arco FG da un'estremità all'altra. Questa porzione ha le proprietà principali dei poligoni regolari; ha gli angoli uguali; è ad un tempo iscrivibile, e circoscrivibile al circolo; ma per altro ella non farebbe parte di un poligono regolare propriamente detto, se l'arco sotteso da un dei suoi lati non fosse una parte aliquota della intera circonferenza.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA

Le circonferenze de' circoli sono come i raggi, e le loro superficie come i quadrati dei medesimi raggi.

Fig. 165. Per abbreviare, indichiamo con *circ.* CA la circonferenza, che ha per raggio CA; dico che si avrà *circ.* CA : *circ.* OB :: CA : OB.

Poichè, se questa proporzione non ha luogo, CA starà ad OB come *circ.* CA stà ad una circonferenza maggiore, o minore di *circ.* OB. Supponiamo che sia minore; e sia, s'è possibile, CA : OB :: *circ.* CA : *circ.* OD.

Iscrivete nella circonferenza, di cui OB è il raggio, un poligono regolare EFGKLE, i cui lati non incontrino la circonferenza, della
* Pr. 10. quale OD è il raggio *; iscrivete un poligono simile MNPSTM nella circonferenza, di cui CA è il raggio.

Posto ciò, poichè questi poligoni sono simili, i loro perimetri MNPSM, EFGKE stanno fra loro come i raggi CA, OB de' circoli
* Pr. 8. circoscritti*, e si avrà MNPSM : EFGKE :: CA : OB; ma, per supposizione, CA : OB :: *circ.* CA : *circ.* OD; dunque MNPSM : EFGKE :: *circ.* CA : *circ* OD. Or questa proporzione è impossibile, perchè il contorno
* Pr. 9. MNPSM è minore di *circ.* CA *, e il contorno EFGKE è maggiore di *circ.* OD; dunque è impossibile che CA stia ad OB come *circ.* CA stà ad una circonferenza minore di *circ.* OB, o in termini più generali è impos-

sibile che un raggio stia ad un raggio come la circonferenza del primo raggio stà ad una circonferenza minore della circonferenza del secondo raggio.

Da ciò conchiudo che non si può dare neppure che CA stia ad OB come *circ.* CA ad una circonferenza maggiore di *circ.* OB; poichè, se ciò fosse, si avrebbe, rovesciando i rapporti, OB a CA come una circonferenza maggiore di *circ.* OB a *circ.* CA, o, il che è lo stesso, come *circ.* OB ad una circonferenza minore di *circ.* CA; dunque un raggio starebbe ad un raggio come la circonferenza del primo raggio stà ad una circonferenza minore della circonferenza del secondo raggio; il che è stato dimostrato impossibile.

Ma se il quarto termine della proporzione CA : OB :: *circ.* CA : X non può essere nè maggiore, nè minore di *circ.* OB, bisogna che sia uguale a *circ.* OB; dunque le circonferenze de' circoli stanno fra loro come i raggi.

Un ragionamento, ed una costruzione interamente simili serviranno a dimostrare che le superficie dei circoli stanno come i quadrati de' loro raggi. Non entreremo in altri particolari su questa proposizione, che d'altronde è un corollario della seguente.

Corollario. Gli archi simili AB, DE stanno come i raggi AC, DO; ed i settori simili ACB, DOE come i quadrati di questi medesimi raggi. Fig. 166.

Poichè, siccome gli archi son simili, l'an-

golo C è uguale all'angolo O *: ora l'angolo C stà a quattro angoli retti come l'arco AB stà alla circonferenza intera descritta col raggio AC *; e l'angolo O stà a quattro angoli retti come l'arco DE stà alla circonferenza descritta col raggio OD; dunque gli archi AB, DE stanno fra loro come le circonferenze, di cui fanno parte; queste circonferenze stanno come i raggi AC, DO; dunque AB : DE :: AC : DO.

* Def. 3. lib. 3.

* 17, 2.

Per la medesima ragione, i settori ACB, DOE stanno come i circoli interi; questi stanno come i quadrati de' raggi; dunque $\text{ACB} : \text{DOE} :: \overline{\text{AC}}^2 : \overline{\text{DO}}^2$.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA

La superficie del circolo ha per misura il prodotto della sua circonferenza per la metà del raggio.

Fig. 167.

Indichiamo con *sup.* CA la superficie del circolo, il di cui raggio è CA; dico che sarà *sup.* $\text{CA} = \frac{1}{2}\text{CA} \times \textit{circ.}\,\text{CA}$.

Poichè se $\frac{1}{2}\text{CA} \times \textit{circ.}\,\text{CA}$ non è la misura del circolo, il cui raggio è CA, questa quantità sarà la misura d'un circolo maggiore, o minore. Supponiamo primieramente che sia la misura d'un circolo maggiore, e sia, se è possibile, $\frac{1}{2}\text{CA} \times \textit{circ.}\,\text{CA} = \textit{sup.}\,\text{CB}$.

Al circolo, il cui raggio è CA, circoscrivete un poligono regolare DEFG ec., i di cui lati non incontrino la circonferenza della

quale CB è il raggio *; la superficie di questo poligono sarà uguale al suo contorno DE+EF+FG+, ec. moltiplicato per $\frac{1}{2}$AC *: ma il contorno del poligono è maggiore della circonferenza iscritta, poichè la circonda da tutte le parti; dunque la superficie del poligono DEFG ec. è maggiore di $\frac{1}{2}$AC× *circ.* AC, che è la misura del circolo, di cui CB è il raggio; dunque il poligono sarebbe maggiore del circolo: ora al contrario è minore, poichè vi è contenuto; dunque è impossibile che $\frac{1}{2}$CA× *circ.* CA sia maggiore di *sup.* CA, o, in altri termini, è impossibile che la circonferenza d'un circolo moltiplicata per la metà del suo raggio sia la misura d'un circolo maggiore. * 10. * 7.

Dico in secondo luogo che il medesimo prodotto non può essere la misura d'un circolo minore; e, per non cambiar figura, supporrò che si tratti del circolo, il cui raggio è CB: bisogna dunque provare che $\frac{1}{2}$CB× *circ.* CB non può essere la misura d'un circolo minore, per esempio, del circolo, il cui raggio è CA. In fatti sia, se è possibile, $\frac{1}{2}$CB× *circ.* CB= *sup.* CA.

Avendo fatto la stessa costruzione di sopra, la superficie del poligono DEFG ec.: avrà dunque per misura (DE+EF+FG+ ec.) × $\frac{1}{2}$CA; ma il contorno DE+EF+FG+ ec. è minore di *circ.* CB, che lo circonda da tutte le parti; dunque l'area del poligono è minore di $\frac{1}{2}$CA× *circ.* CB, ed, a più forte ra-

gione, minore di $\frac{1}{2}$CB$\times$ *circ.* CB. Quest' ultima quantità è per ipotesi, la misura del circolo, di cui CA è il raggio; dunque il poligono sarebbe minore del circolo iscritto; il che è assurdo; dunque è impossibile che la circonferenza d' un circolo moltiplicata per la metà del suo raggio sia la misura d' un circolo minore.

Dunque finalmente la circonferenza d' un circolo moltiplicata per la metà del suo raggio è la misura dell'area del medesimo circolo.

Corollario I. La superficie d' un settore è uguale all' arco di questo settore moltiplicato per la metà del raggio.

Fig. 168. Poichè il settore ACB stà al circolo intero come l' arco AMB stà alla circonferenza
* 17, 2. intera ABD *, o come AMB$\times\frac{1}{2}$AC stà ad ABD$\times\frac{1}{2}$AC: ma il circolo intero $=$ABD$\times$ $\frac{1}{2}$AC; dunque il settore ACB ha per misura AMB$\times\frac{1}{2}$AC.

Corollario II. Chiamiamo p la circonferenza, il di cui diametro è l' unità: poichè le circonferenze stanno come i raggi, o come i diametri, si potrà far questa proporzione: il diametro 1 stà alla sua circonferenza p
Fig. 165. come il diametro 2CA stà alla circonferenza, che ha per raggio CA; talmente che si avrà $1 : p :: 2CA : circ.\ CA$; dunque *circ.* CA$=2p\times$CA. Moltiplicando da ambe le parti per $\frac{1}{2}$CA, si avrà $\frac{1}{2}CA\times circ.\ CA = p\times\overline{CA}^{2}$, o *sup.* $CA = p.\overline{CA}^{2}$; dunque *la superficie d' un cir-*

colo è uguale al quadrato del suo raggio moltiplicato per il numero costante p, *che rappresenta la circonferenza, il di cui diametro è* 1, *o il rapporto della circonferenza al diametro.*

Parimente la superficie del circolo, che ha per raggio OB, sarà uguale a $p \times \overline{OB}^2$; ora $p \times \overline{CA}^2 : p \times \overline{OB}^2 :: \overline{CA}^2 : \overline{OB}^2$; dunque *le superficie dei circoli stanno fra loro come i quadrati dei loro raggi;* il che s' accorda col precedente teorema.

Scolio. Abbiamo già detto che il problema della quadratura del circolo consiste in trovare un quadrato uguale di superficie ad un circolo, il cui raggio è cognito; ma si è adesso provato che il circolo è equivalente al rettangolo fatto sulla circonferenza, e sulla metà del raggio; e questo rettangolo si cangia in un quadrato prendendo una media proporzionale fra le due sue dimensioni *; quindi è che il problema della quadratura del circolo si riduce a trovar la circonferenza quando si conosce il raggio, e per questo basta conoscere il rapporto della circonferenza al raggio, o al diametro. * Pr. 6. lib. 3.

Finora non si è potuto determinare questo rapporto se non che in una maniera prossima al vero; ma l'approssimazione è stata portata sì lungi, che la cognizione del rapporto esatto non avrebbe alcun vantaggio reale al di sopra di quella del rapporto approssimativo. Perciò questa ricerca, che ha molto occupato

i Geometri allorchè i metodi di approssimazione erano men conosciuti, è adesso riposta tra le ricerche futili, di cui non è permesso occuparsi se non a coloro, che hanno appena le prime nozioni della Geometria.

Archimede ha provato che il rapporto della circonferenza al diametro è compreso fra $3\frac{10}{70}$ e $3\frac{10}{71}$; laonde $3\frac{1}{7}$, ovvero $\frac{22}{7}$ è un valore già molto prossimo al numero, che abbiamo rappresentato con p; e questa prima approssimazione è molto in uso a cagione della sua semplicità. *Mezio* ha trovato per il medesimo numero il valore molto più prossimo $\frac{355}{113}$. Finalmente il valore di p, sviluppato fino a un cert'ordine di *decimali*, è stato trovato da altri calcolatori 3, 14159265358979 32, ec., e si è avuta la pazienza di continuare queste *decimali* fino alla centventisettesima, e parimente sino alla centcinquantesima. È chiaro che una tale approssimazione quasi equivale alla verità, e che non si conoscono meglio le *radici* delle *potenze* imperfette.

Si spiegheranno nei problemi seguenti due dei metodi più semplici per ottenere queste approssimazioni.

PROPOSIZIONE XIII.

PROBLEMA

Essendo date la superficie d'un poligono regolare iscritto e la superficie d'un poligono simile circoscritto, trovare le superficie dei poligoni regolari iscritto, e circoscritto d'un doppio numero di lati.

Sia AB il lato del poligono dato iscritto, Fig. 169.
EF paralello ad AB il lato del poligono simile circoscritto, C il centro del circolo: se si tirano la corda AM, e le tangenti AP, BQ, la corda AM sarà il lato del poligono iscritto d'un doppio numero di lati, e PQ, doppio di PM, sarà quello del poligono simile circoscritto *. Posto ciò, siccome la medesima costruzione hà luogo nei differenti angoli eguali ad ACM, basta considerare l'angolo ACM solo, ed i triangoli, che vi son contenuti, staranno fra loro come i poligoni interi. Sia A la superficie del poligono iscritto, di cui AB è un lato, B la superficie del poligono simile circoscritto, A′ la superficie del poligono, di cui AM è un lato, B′ la superficie del poligono simile circoscritto; A, e B son cogniti: si tratta di trovare A′ e B′ * 6.

1.° I triangoli ACD, ACM, il cui vertice comune è A, stanno fra loro come le respettive basi CD, CM; d'altronde questi triangoli stanno come i poligoni A, ed A′, di cui fanno parte; dunque A : A′ :: CD : CM. I triangoli CAM, CME, il cui vertice comune è M, stanno fra loro come le basi respettive CA, CE; questi medesimi triangoli stanno come i poligoni A′, e B, di cui fanno parte; dunque A′ : B :: CA : CE. Ma, a motivo delle paralelle AD, ME, si ha CD : CM :: CA : CE; dunque A : A′ :: A′ : B; dunque il poligono A′, uno di quelli, che si cercano, è medio proporzionale fra i due poli-

goni cogniti A, e B, e si ha per conseguenza $A' = \sqrt{A \times B}$.

2.° Il triangolo CPM stà al triangolo CPE, a motivo dell'altezza comune CM, come PM stà a PE; ma la linea CP dividendo in due parti uguali l'angolo MCE, si ha * PM : PE :: CM : CE :: CD : CA :: A : A'; dunque CPM : CPE :: A : A'; *componendo* CMP : CPM+CPE, o CME, :: A : A+A'. Ma CMPA o 2CMP, e CME stanno fra loro come i poligoni B', e B, di cui fanno parte; dunque B' : B :: 2A : A+A'. Si è già determinato A'; questa nuova proporzione determinerà B', e si avrà $B' = \frac{2A \times B}{A+A'}$; dunque col mezzo dei poligoni A, e B, è facile trovare i poligoni A', e B', che hanno doppio numero di lati.

* 17, 3.

PROPOSIZIONE XIV.

PROBLEMA

Trovare il rapporto prossimo al vero della circonferenza al diametro.

Sia il raggio del circolo =1; il lato del quadrato iscritto sarà $\sqrt{2}$ *; quello del quadrato circoscritto è uguale al diametro 2; dunque la superficie del quadrato iscritto =2, e quella del quadrato circoscritto =4. Adesso, se si fa A=2, e B=4, si troverà per il problema precedente l'ottagono iscritto $A' = \sqrt{8} = 2,8284271$, e l'ottagono circoscritto $B' = \frac{16}{2+\sqrt{8}} = 3,3137085$. Conoscendo co-

* 3.

sì gli ottagoni iscritto, e circoscritto, si troveranno col loro mezzo i poligoni d' un doppio numero di lati; bisognerà nuovamente supporre A=2, 8284271, B=3, 3137085, e si avrà $A'=\sqrt{A\times B}=3,0614674$, e $B'=\frac{2A\times B}{A+A'}=3,1825979$. Dipoi questi poligoni di 16 lati serviranno a conoscere quelli di 32, e si continuerà così finchè il calcolo non dia più differenza fra i poligoni iscritto, e circoscritto, almeno nelle cifre *decimali* impiegate, che in questo caso son sette. Arrivati a tal punto, si conchiuderà che il circolo è uguale all' ultimo resultato, perchè il circolo dee sempre esser compreso tra il poligono iscritto, ed il poligono circoscritto; dunque, se questi non differiscono fra di loro fino a una certa cifra *decimale*, il circolo pure non ne differirà fino alla stessa cifra.

Ecco il calcolo di questi poligoni prolungato finchè non differiscano più nella settima cifra *decimale*.

Numero dei lati	Poligono iscritto	Poligono circoscritto
4.....	2,0000000.....	4,0000000
8.....	2,8284271.....	3,3137085
16.....	3,0614674.....	3,1825979
32.....	3,1214451.....	3,1517249
64.....	3,1365485.....	3,1441184
128.....	3,1403311.....	3,1422236
256.....	3,1412772.....	3,1417504
512.....	3,1415138.....	3,1416321
1024.....	3,1415729.....	3,1416025

2048.....	3,1415877.....	3,1415951
4096.....	3,1415914.....	3,1415933
8192.....	3,1415923.....	3,1415928
16384.....	3,1415925.....	3,1415927
32768.....	3,1415926.....	3,1415926

Da ciò conchiudo che la superficie del circolo =3,1415926. Si potrebbe aver dubbio sull'ultima *decimale* a cagione degli errori prodotti dalle parti neglette; ma il calcolo è stato fatto con una decimale di più, per esser certi del resultato, che abbiam trovato fino all'ultima *decimale*.

Poichè la superficie del circolo è uguale alla mezza-circonferenza moltiplicata per il raggio, essendo il raggio =1, la mezza-circonferenza è 3, 1415926; ovvero, essendo il diametro =1, la circonferenza è 3,1415926 dunque il rapporto della circonferenza al diametro, indicato di sopra con p,=3,1415926:1.

PROPOSIZIONE XV.

LEMMA

Fig. 170. *Il triangolo* CAB *è equivalente al triangolo isoscele* DCE, *che ha il medesimo angolo* C, *e il di cui lato* CE, o CD *è medio proporzionale fra* CA, *e* CB. *Di più, se l'angolo* CAB *è retto, la perpendicolare* CF *abbassata sulla base del triangolo isoscele sarà media proporzionale fra il lato* CA, *e la mezza-somma dei lati* CA, CB.

Perchè 1.°, a motivo dell'angolo comune C, il triangolo ABC stà al triangolo isoscele

DCE come AC×CB stà a DC×CE, o $\overline{DC}^2$ *; dunque questi triangoli saranno equivalenti, se DC^2=AC×CB, o se DC è media proporzionale tra AC, e CB. * 24,3.

2.° La perpendicolare CGF tagliando in due parti uguali l'angolo ACB, si ha * AG : GB :: AC : CB, donde ne segue *componendo* AG : AG+GB, o AB :: AC : AC+CB; ma AG sta ad AB come il triangolo ACG stà al triangolo ACB, o 2CDF; d'altronde, se l'angolo A è retto, i triangoli rettangoli ACG, CDF sono simili, e si ha ACG : CDF :: $\overline{AC}^2$: CF^2; dunque * 17,3.

$$\overline{AC}^2 : 2\overline{CF}^2 :: AC : AC+CB.$$

Moltiplicando il secondo rapporto per AC, gli antecedenti diverranno uguali, e si avrà per conseguenza $2\overline{CF}^2$=AC×(AC+CB), o $\overline{CF}^2$=AC×$\left(\frac{AC+CB}{2}\right)$; dunque 2.°, se l'angolo A è retto, la perpendicolare CF sarà media proporzionale tra il lato AC, e la mezza somma dei lati AC, CB.

PROPOSIZIONE XVI.

PROBLEMA

Trovare un circolo, che differisca quanto poco si voglia da un poligono regolare dato.

Sia proposto per esempio il quadrato BMNP; abbassate dal centro C la perpendicolare CA sul lato MB, e tirate CB. Fig. 170

Il circolo descritto col raggio CA è iscritto nel quadrato, ed il circolo descritto col raggio CB è circoscritto al quadrato medesimo; il primo sarà minor del quadrato; il secondo sarà maggiore; si tratta di ristringere questi limiti.

Prendete CD, e CE uguali ciascuna alla media proporzionale tra CA, e CB; tirate ED; ed il triangolo isoscele CDE sarà equi-
* 15. valente al triangolo CAB *; fate lo stesso per ciascuno degli otto triangoli, che compongono il quadrato; e formerete così un ottagono regolare equivalente al quadrato BMNP. Il circolo descritto col raggio CF medio proporzionale fra CA, e $\frac{CA+CB}{2}$ sarà iscritto nell'ottagono, ed il circolo descritto col raggio CD gli sarà circoscritto; laonde il primo sarà minor del quadrato, ed il secondo maggiore.

Se si cangia nella medesima maniera il triangolo rettangolo CDF in un triangolo isoscele equivalente, si formerà con tal mezzo un poligono regolare di sedici lati equivalente al quadrato proposto. Il circolo iscritto in questo poligono sarà minor del quadrato, ed il circolo circoscritto sarà maggiore.

Si può continuare così finchè il rapporto tra il raggio del circolo iscritto, ed il raggio del circolo circoscritto differisca quanto poco si vorrà dall'uguaglianza. Allora l'uno,

e l'altro circolo potrà essere riguardato come equivalente al quadrato proposto.

Ecco a che cosa riducesi la ricerca dei raggi consecutivi. Sia a il raggio del circolo iscritto in uno dei poligoni trovati, b il raggio del circolo circoscritto al medesimo poligono; siano a', e b' i raggi simili per il poligono susseguente, che ha un doppio numero di lati. Secondo ciò, che abbiam dimostrato, b' è una media proporzionale fra a, e b, ed a' è una media proporzionale fra a, ed $\frac{a+b}{2}$; talmente che si avrà $b'=\sqrt{a\times b}$; ed $a'=\sqrt{a\times\frac{a+b}{2}}$; dunque, essendo cogniti i raggi a, e b d'un poligono, se ne deducono facilmente i raggi a', e b' del poligono susseguente; e si continuerà così finchè la differenza fra i due raggi sia divenuta insensibile; ed allora l'uno, o l'altro di questi raggi sarà il raggio del circolo equivalente al quadrato, o al poligono proposto.

Scolio. Questo metodo è facile a praticarsi in linee, poichè si riduce a trovare delle medie proporzionali successive fra linee cognite; ma riesce ancor meglio in numeri, ed è uno dei mezzi più comodi, che la Geometria elementare possa offerire per trovar prontamente il rapporto prossimo al vero della circonferenza al diametro. Sia il lato del quadrato $=2$; il primo raggio iscritto **CA** sarà 1, ed il primo raggio circoscritto

CB sarà $\sqrt{2}$, ovvero 1,4142136. Facendo dunque $a=1, b=1{,}4142136$, si troverà $b'=1{,}1892071$, ed $a'=1{,}0986841$. Questi numeri serviranno a calcolare i seguenti secondo la legge data di continuazione. Ecco il resultato del calcolo fatto fino a sette, o otto cifre colle Tavole dei *logaritmi* ordinarj.

Raggi de' circoli circoscritti	Raggi de' circoli iscritti
1,4142136	1,0000000
1,1892071	1,0986841
1,1430500	1,1210863
1,1320149	1,1265639
1,1292862	1,1279257
1,1286063	1,1282657.

Adesso che la prima metà delle cifre è ridotta la medesima dalle due parti, invece dei medj geometrici, si posson prendere i medj aritmetici, che ne differiscon soltanto nelle *decimali ulteriori*. Con tal mezzo l'operazione si abbrevia molto, ed i resultati sono

1,1284360	1,1283508
1,1283934	1,1283721
1,1283827	1,1283774
1,1283801	1,1283787
1,1283794	1,1283791
1,1283792	1,1283792.

Dunque 1,1283792 è molto prossimamente al vero il raggio del circolo uguale in su-

perficie al quadrato, il di cui lato è 2. Quindi è facil trovare il rapporto della circonferenza al diametro; perchè si è dimostrato che la superficie del circolo è uguale al quadrato del raggio moltiplicato per il numero p; dunque se si divide la superficie 4 per il quadrato di 1,1283792, si avrà il valore di p, che si trova con questo calcolo essere 3,1415926 ec., come si era trovato con altro metodo.

APPENDICE AL LIBRO QUARTO

DEFINIZIONI

I. Si chiama *massimo* la quantità più grande di tutte quelle della medesima specie; *minimo* la più piccola.

Così il diametro del circolo è un *massimo* fra tutte le linee, che congiungon due punti della circonferenza, e la perpendicolare è un *minimo* fra tutte le linee condotte da un punto dato ad una linea data.

II. Si chiamano figure *isoperimetre* quelle, che hanno i *perimetri* uguali.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA

Fra tutti i triangoli della stessa base, e dello stesso perimetro il triangolo isoscele è un massimo.

Fig. 172. Sia AC=CB, e AM+MB=AC+CB; dico che il triangolo isoscele ACB è maggiore in superficie del triangolo non isoscele AMB, che ha la medesima base, e lo stesso perimetro.

Dal punto C, come centro, e col raggio CA=CB descrivete una circonferenza, che incontri CA prolungato in D; tirate DB; e l'angolo DBA iscritto nel mezzo-circolo sarà
* 15, 3. un angolo retto *. Prolungate la perpendicolare DB verso N; fate MN=MB; e tirate AN. Finalmente dai punti M, e C abbassate MP, CG perpendicolari sopra DN. Poichè CB=CD, e MN=MB, si ha AC+CB =AD, e AM+MB=AM+MN. Ma AC+CB =AM+MB; dunque AD=AM+MN; dunque AD>AN. Ora, se l'obliqua AD è maggior dell'obliqua AN, dev'essere più lontana dalla perpendicolare AB; dunque DB>BN.
* 12, 1 Dunque BG, che è metà di BD *, sarà più grande di BP, metà di BN. Ma i triangoli ABC, ABM, che hanno la medesima base AB, stanno fra loro come le respettive altezze BG, BP; e poichè BG>BP, ne segue che il triangolo isoscele ABC è maggiore del non-isoscele ABM della medesima base, e dello stesso perimetro.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA

Di tutti i poligoni isoperimetri, e d'un medesimo numero di lati il più grande è l'equilatero

Poichè sia il poligono ABCDEF il poligono *massimo;* se il lato BC non è uguale a CD, fate sulla base BD un triangolo isoscele BOD, che sia isoperimetro rispetto a BCD; il triangolo BOD sarà maggiore di BCD *, e per conseguenza il poligono ABODEF sarà maggiore di ABCDEF; dunque quest'ultimo non sarebbe il *massimo* fra tutti quelli, che hanno l'istesso perimetro, ed il medesimo numero di lati; il che è contra la supposizione; dunque BC=CD: per la medesima ragione CD=DE, DE=EF; dunque tutti i lati del poligono *massimo* sono uguali tra loro. Fig. 173. * Pr. 1.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA

Di tutti i triangoli formati con due lati dati, che faccian fra loro un angolo a piacimento, il massimo *è quello, in cui i due lati dati formano un angolo retto.*

Siano i due triangoli BAC, BAD, che hanno il lato AB comune, ed il lato AC=AD; se l'angolo BAC è retto, dico che il triangolo BAC sarà maggior del triangolo BAD, nel quale l'angolo A è acuto, od ottuso. Fig. 174.

Poichè essendo la stessa la base AB, i due triangoli BAC, BAD stanno come le altezze AC, DE; ma la perpendicolare DE è minor dell'obliqua AD, o della sua uguale AC; dunque il triangolo BAD è minore di BAC.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA

Di tutti i poligoni formati con dei lati dati, ed un ultimo a piacimento, il massimo *dev'esser tale che tutti i suoi angoli siano iscritti in una mezza-circonferenza, di cui il lato incognito sia il diametro.*

Fig. 175. Sia ABCDEF il *massimo* dei poligoni formati coi lati dati AB, BC, CD, DE, EF, ed un ultimo AF a piacimento; tirate le diagonali AD, DF. Se l'angolo ADF non è retto, si potrà, conservando le parti ABCD, DEF tali quali sono, aumentare il triangolo ADF, e per conseguenza il poligono intero, rendendo l'angolo ADF retto: ma questo poligono non può essere aumentato di più, poichè si suppone giunto al suo *massimo;* dunque l'angolo ADF è gia retto. Lo stesso è degli angoli ABF, ACF, AEF; dunque tutti gli angoli A, B, C, D, E, F del poligono *massimo* sono iscritti in una mezza-circonferenza, di cui il lato indeterminato AF è il diametro.

Scolio. Questa proposizione fa nascere la questione se vi siano diverse maniere di formare un poligono con dei lati dati, ed un ultimo incognito, che sarà il diametro della

mezza-circonferenza, nella quale gli altri lati sono iscritti. Avanti di decidere questa questione bisogna osservare che, se una medesima corda AB sottende degli archi descritti con differenti raggi AC, AD, l'angolo al centro appoggiato su questa corda sarà minore nel circolo, il di cui raggio è maggiore; così ACB<ADB perchè l'angolo ADO= ACD+CAD*; dunque ACD<ADO, e raddoppiando da una parte, e dall'altra si avrà ACB<ADB. Fig. 176. * 19,1.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA

V'è una sola maniera di formare il poligono ABCDEF *con dei lati dati, ed un ultimo incognito, che sia il diametro della mezza-circonferenza, nella quale sono iscritti gli altri lati.*

Poichè supponiamo che si sia trovato un circolo, che soddisfaccia alla questione: se si prende un circolo maggiore, le corde AB, BC, CD, ec. corrisponderanno ad angoli al centro minori. La somma di questi angoli al centro sarà dunque minore di due angoli retti, e così le estremità dei lati dati non perverranno più alle estremità del diametro. L'inconveniente contrario avrà luogo se si prende un circolo minore; dunque il poligono, di cui si tratta, non può essere iscritto se non che in un sol circolo. Fig. 175.

Scolio. Si può cambiare a piacimento l'ordine dei lati AB, BC, CD, ec., ed il dia-

metro del circolo circoscritto sarà sempre lo stesso, come pure la superficie del poligono; poichè, qualunque sia l'ordine degli archi AB, BC, ec., basta che la lor somma faccia la mezza-circonferenza, ed il poligono avrà sempre la medesima superficie, poichè sarà uguale al mezzo-circolo meno i segmenti AB, BC, ec., la somma de' quali è sempre la stessa.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA

Di tutti i poligoni formati con dei lati dati il massimo *è quello, che si può iscrivere in un circolo.*

Fig. 177. Sia ABCDEFG il poligono iscritto, e *abcdefg* il non-iscrittibile formato con dei lati uguali, talmente che sia AB=*ab*, BC=*bc*, ec.; dico che il poligono iscritto è maggiore dell'altro.

Tirate il diametro EM; conducete AM, MB; sopra *ab*=AB fate il triangolo *abm*= ABM; e tirate *em*.

In virtù della proposizione IV. il poligono EFGAM è maggiore di *efgam*, salvo che questo non possa essere parimente iscritto in una mezza-circonferenza, di cui il lato *em* sarebbe il diametro; nel qual caso i due poligoni sarebbero uguali in virtù della proposizione V. Per la medesima ragione il poligono EDCBM è maggiore di *edcbm*, eccetto il medesimo caso, in cui vi sarebbe uguaglianza. Dunque il poligono intero EFGAMBCDE

è maggiore di *efgambcde* salvo che non siano interamente uguali; ma essi non lo sono, poichè l'uno è iscrittibile, e l'altro è supposto non iscrittibile; dunque il poligono iscritto è il maggiore. Da ambedue togliendo i triangoli uguali ABM, *abm*, resterà il poligono iscritto ABCDEFG maggiore del non-iscrittibile *abcdefg*.

Scolio. Si dimostrerà, come nella proposizione V., che non può esservi che un sol circolo, e per conseguenza che un sol poligono *massimo*, che soddisfaccia alla questione, e questo poligono sarebbe ancora della medesima superficie in qualunque modo che si cangiasse l'ordine dei suoi lati.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA

Il poligono regolare è un massimo *fra tutti i poligoni isoperimetri, e d'un medesimo numero di lati.*

Poichè, secondo il teorema II., il poligono *massimo* ha tutti i suoi lati uguali; e, secondo il teorema precedente, è iscrittibile nel circolo; dunque esso è regolare.

PROPOSIZIONE VIII.

LEMMA

Due angoli al centro, misurati in due circoli differenti, stanno fra loro come gli archi compresi divisi pe' i loro raggi.

Così l'angolo C stà all'angolo O come il rapporto $\frac{AB}{AC}$ stà al rapporto $\frac{DE}{DO}$. Fig. 1, 8.

Con un raggio OF ugnale ad AC descrivete l'arco FG compreso fra i lati OD, OE prolungati: a cagione de' raggi ugnali AC, OF, si avrà primieramente C : O :: AB : FG, ovvero :: $\frac{AB}{AC}$: $\frac{FG}{FO}$; ma *, a cagione degli archi simili FG, DE, si ha * FG : DE :: FO : DO; dunque il rapporto $\frac{FG}{FO}$ è uguale al rapporto $\frac{DE}{DO}$; e per conseguenza si ha C : O :: $\frac{AB}{AC}$: $\frac{DE}{DO}$.

* 17, 2.

* 11.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA

Di due poligoni regolari isoperimetri quello, che ha più lati, è il maggiore.

Fig. 179. Sia DE il mezzo-lato d'un dei poligoni, O il suo centro, OE il suo apotèma; sia AB il mezzo-lato dell'altro poligono, C il suo centro, CB il suo apotèma. Si suppongono i centri O, e C situati ad una distanza qualunque OC, e gli apotèmi OE, CB nella direzione medesima OC. Così DOE, e ACB saranno i mezzi-angoli al centro dei poligoni, e siccome questi angoli non sono uguali, le rette AC, OD prolungate s'incontreranno in un punto F; da questo punto abbassate sopra OC la perpendicolare FG; dai punti O, e C, come centri, descrivete gli archi GI, GH terminati ai lati OF, CF.

Posto ciò, si avrà per il Lemma prece-

dente $O : C :: \frac{GI}{OG} : \frac{GH}{CG}$; ma DE stà al perimetro del primo poligono come l'angolo O stà a quattro angoli retti, ed AB stà al perimetro del secondo come l'angolo C stà a quattro angoli retti; dunque, poichè i perimetri dei poligoni sono uguali, $DE : AB :: O : C$; dunque $DE : AB :: \frac{GI}{OG} : \frac{GH}{CG}$. Moltiplicando gli antecedenti per OG, ed i conseguenti per CG, si avrà allora $DE \times OG : AB \times CG :: GI : GH$; ma i triangoli simili ODE, OFG danno $OE : OG :: DE : FG$, donde resulta $DE \times OG = OE \times FG$. Si avrà parimente $AB \times CG = CB \times FG$; dunque $OE \times FG : CB \times FG :: GI : GH$, ovvero $OE : CB :: GI : GH$. Dico adesso che l'arco GI è maggiore dell'arco GH, ed allora ne seguirà che l'apotèma OE è maggior di CB.

Dall'altra parte di CF si faccia la figura CKx interamente identica alla figura CGx, in modo che si abbia $CK = CG$, l'angolo $HCK = HCG$, e l'arco $Kx = xG$; la curva KxG inviluppera KHG, e sarà maggior di quest'arco *; dunque Gx metà della curva è maggior di GH metà dell'arco; dunque molto più GI è maggior di GH. * 9.

Resulta da ciò che l'apotèma OE è maggior di CB: ma i due poligoni, avendo il medesimo perimetro, stanno fra loro come i respettivi apotèmi *; dunque il poligono, che ha per mezzo-lato DE, è maggiore di quello, che ha per mezzo-lato AB; il primo ha più * 7.

lati, poichè l'angolo al centro è minore; dunque di due poligoni regolari isoperimetri quello, che ha più lati, è il maggiore.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA

Il circolo è maggiore d'ogni poligono isoperimetro.

Fig. 180. Si è già provato che di tutti i poligoni isoperimetri, e d'un medesimo numero di lati, il poligono regolare è il più grande; laonde non si tratta che di paragonare il circolo ad un poligono regolare qualunque isoperimetro. Sia AI il mezzo-lato di questo poligono, C il suo centro. Sia nel circolo isoperimetro l'angolo DOE=ACI, e perciò l'arco DE uguale al mezzo-lato AI. Il poligono P starà al circolo C come il triangolo ACI stà al settore ODE, ossia $P : C :: \frac{AI \times CI}{2} : \frac{DE \times OE}{2} :: CI : OE$. Sia condotta al punto E la tangente EG, che incontri CD prolungata in G; i triangoli simili ACI, GOE daranno la proporzione CI : OE :: AI, ovvero DE : GE; dunque P : C :: DE : GE, o come $DE \times \frac{1}{2}OE$, che è la misura del settore DOE, stà a $GE \times \frac{1}{2}OE$, che è la misura del triangolo GOE: ora il settore è minor del triangolo; dunque P è minore di C; dunque il circolo è maggiore d'ogni poligono isoperimetro.

LIBRO QUINTO

I PIANI E GLI ANGOLI SOLIDI

DEFINIZIONI

1. Una linea retta è *perpendicolare ad un piano* quando è perpendicolare a tutte le rette, che passano per il suo *piede*, e sono nel piano *. Reciprocamente il piano è perpendicolare alla linea retta. * Pr. 4.

Il *piede* della perpendicolare è il punto dove questa linea incontra il piano.

2. Una linea è *paralella ad un piano* quando non può incontrarlo, a qualunque distanza ambedue si prolunghino. Reciprocamente il piano è paralello alla linea.

3. Due *piani* son *paralelli* fra loro quando non possono mai incontrarsi, a qualunque distanza si prolunghino l'uno, e l'altro.

4. Si dimostrerà * che l'intersezione comune di due piani, che s'incontrano, è una linea retta: posto ciò, *l'inclinazione* scambievole *di due piani* è la quantità o apertura più, o meno grande, per cui sono distanti l'uno dall'altro; questa quantità si misura * * dall'angolo, che fanno fra loro due perpen- * Pr. 3. * * Pr. 17.

dicolari condotte in ognuno di questi piani ad un medesimo punto dell'intersezione comune.

Quest'angolo può essere acuto, retto, od ottuso.

5. Se è retto, i due *piani* saranno *perpendicolari* fra loro.

6. *Angolo solido* è lo spazio angolare compreso tra più piani, che si riuniscono in un medesimo punto.

Fig. 199. Così l'angolo solido S è formato dalla riunione degli angoli piani ASB, BSC, CSD, DSA.

Sono necessarj almeno tre angoli piani per formare un angolo solido.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA

Una linea retta non può essere in parte in un piano, ed in parte fuori.

Poichè, secondo la definizione del piano, subito che una linea retta ha due punti comuni con un piano, dessa è tutta intera in un tal piano.

Corollario. Dunque, per riconoscere se una superficie è piana, bisogna applicare una linea retta in differenti sensi su questa superficie, e vedere se essa tocca la superficie in tutta la sua estensione.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA

Due linee rette, che si tagliano, sono in

un medesimo piano, e ne determinano la posizione.

Siano AB, AC due linee rette, che si tagliano in A: si può concepire un piano dove si trova la linea retta AB: se si fa girar questo piano intorno ad AB finchè passi per il punto C, allora la linea AC, che ha due dei suoi punti A, e C in questo piano, vi sarà tutta intera; dunque la posizione di questo piano è determinata dalla sola condizione di passare per le due rette AB, AC. Fig. 181.

Corollario I. Dunque un triangolo ABC, o tre punti A, B, C non in linea retta, determinano la posizione d'un piano.

Corollario II. Dunque anche due paralelle AB, CD determinano la posizione d'un piano; perchè, se si conduce la secante EF, il piano delle due rette AE, EF, sarà quello delle paralelle AB, CD. Fig. 182.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA

Se due piani si tagliano, la loro comune intersezione sarà una linea retta.

Poichè, se nei punti comuni ai due piani se ne trovassero tre, che non fossero in linea retta, i due piani, di cui si tratta, passando ciascuno per questi tre punti, non farebber che un solo, e medesimo piano *; il che è * 2. contra la supposizione.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA

Fig 183. *Se una linea retta* AP *è perpendicolare a due altre* PB, PC, *che s' incrociano al suo piede nel piano* MN, *essa sarà perpendicolare ad una retta qualunque* PQ *condotta dal suo piede nel medesimo piano, e perciò sarà perpendicolare al piano* MN.

Per un punto Q, preso a volontà sopra PQ, tirate la retta BC nell'angolo BPC, di
* Prob. 5. lib. 3. maniera che BQ=QC *; tirate AB, AQ, AC.

Essendo la base BC divisa in due parti
* 14, 3. uguali nel punto Q, il triangolo BPC darà *

$$\overline{PC}^2+\overline{PB}^2=2\overline{PQ}^2+2\overline{QC}^2.$$

Il triangolo BAC darà parimente

$$\overline{AC}^2+\overline{AB}^2=2\overline{AQ}^2+2\overline{QC}^2.$$

Togliendo la prima equazione dalla seconda, e osservando che i triangoli APC, APB, ambedue rettangoli in P, danno $\overline{AC}^2-\overline{PC}^2=\overline{AP}^2$, e $\overline{AB}^2-\overline{PB}^2=\overline{AP}^2$, si avrà

$$\overline{AP}^2+\overline{AP}^2=2\overline{AQ}^2-2\overline{PQ}^2.$$

Dunque, prendendo le metà da ambe le parti, $\overline{AP}^2=\overline{AQ}^2-\overline{PQ}^2$, o $\overline{AQ}^2=\overline{AP}^2+\overline{PQ}^2$; dun-
* 13, 3. que il triangolo APQ è rettangolo in P *; dunque AP è perpendicolare a PQ.

Scolio. Si vede da ciò che non solamente è possibile che una linea retta sia perpendicolare a tutte quelle, che passano per il suo piede in un piano, ma che questo accade tutte

le volte che questa linea è perpendicolare a due rette condotte nel piano. Ciò dimostra la legittimità della definizione I.

Corollario I. La perpendicolare AP è più corta di un' obliqua qualunque AQ; dunque misura la vera distanza del punto A dal piano MN.

Corollario II. Da un punto P dato sopra un piano non si può alzare che una sola perpendicolare a questo piano; perchè, se si potessero alzare due perpendicolari dal medesimo punto P, conducete per queste due perpendicolari un piano, la cui intersezione col piano MN sia PQ; allora le due perpendicolari, di cui si tratta, sarebbero perpendicolari alla linea PQ nel medesimo punto, e nel medesimo piano; il che è impossibile.

È parimente impossibile d' abbassare da un punto dato fuori d' un piano due perpendicolari a questo piano; poichè siano AP, AQ queste due perpendicolari; allora il triangolo APQ avrebbe due angoli retti APQ, AQP; il che è impossibile.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA

Le oblique ugualmente lontane dalla perpendicolare sono uguali; e di due oblique disugualmente lontane dalla perpendicolare quella, che se ne allontana di più, è la maggiore.

Poichè essendo retti gli angoli APB, APC, APD, se si suppongono le distanze PB, PC, Fig. 184.

PD uguali fra loro, i triangoli APB, APC, APD avranno un angolo uguale compreso fra lati uguali; dunque saranno uguali; dunque le ipotenuse, o le oblique AB, AC, AD saranno uguali fra loro. Parimente, se la distanza PE è maggior di PD, o della sua uguale PB, è chiaro che l'obliqua AE sarà maggiore di AB, o della sua uguale AD.

Corollario. Tutte le oblique ugnali AB, AC, AD, ec. terminano alla circonferenza BCD descritta dal piede della perpendicolare P come centro; dunque, essendo dato un punto A fuori d'un piano, se si vuol trovare su questo piano il punto P ove cadrebbe la perpendicolare abbassata da A, bisogna segnare su questo piano tre punti B, C, D ugualmente lontani dal punso A, e cercare in seguito il centro del circolo, che passa per questi tre punti: questo centro sarà il punto cercato P.

Scolio. L'angolo ABP è ciò, che si chiama *inclinazione dell'obliqua* AB *sul piano* MN; si vede che quest'inclinazione è uguale per tutte le oblique AB, AC, AD, ec., che si allontanano ugualmente dalla perpendicolare, perchè tutti gli angoli ABP, ACP, ADP, ec. sono uguali fra loro.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA

Fig. 185. *Sia* AP *una perpendicolare al piano* MN, BC *una linea situata in questo piano; se dal piede* P *della perpendicolare si abbassa* PD

perpendicolare sopra BC, *e che si tiri* AD, *dico che* AD *sara perpendicolare a* BC.

Prendete DB=DC, e tirate PB, PC, AB, AC: poichè DB=DC, l'obliqua PB=PC; e per rapporto alla perpendicolare AP, poichè PB=PC, l'obliqua AB=AC*; dunque * 5.
la linea AD ha due dei suoi punti A, e D ugualmente distanti dalle estremità B, e C; dunque AD è perpendicolare sul mezzo di BC.

Corollario. Si vede nel medesimo tempo che BC è perpendicolare al piano APD, poichè BC è perpendicolare a un tempo alle due rette AD, PD.

Scolio. Le due linee AE, BC offron l'esempio di due linee rette, che non s'incontrano perchè non sono situate in un medesimo piano. La più corta distanza di queste linee è la retta PD, che è ad un tempo stesso perpendicolare alla linea AP, e alla linea BC. La distanza PD è la più corta fra queste due linee; poichè, se si congiungono due altri punti, come A e B, la distanza AB è maggiore di AD; AD è maggior di PD; dunque molto più AB>PD.

Le due linee AE, CB, benchè non situate in un medesimo piano, sono obbligate a fare tra loro un angolo retto, perchè AE, e la paralella condotta per un dei suoi punti alla linea BC faranno tra loro un angolo retto. Parimente la linea AB, e la linea PD, che rappresentano due linee rette qualunque non situate nel medesimo piano, sono obbli-

gate di far tra loro il medesimo angolo, che farebbe con AB la paralella a PD condotta per uno dei punti di AB.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA

Fig. 186. *Se la linea* AP *è perpendicolare al piano* MN, *ogni linea* DE *paralella ad* AP *sarà perpendicolare al medesimo piano.*

Per le paralelle AP, DE conducete un piano, la di cui intersezione col piano MN sarà PD; nel piano MN conducete BC perpendicolare a PD, e tirate AD.

Secondo il corollario del teorema precedente BC è perpendicolare al piano APDE; dunque l'angolo BDE è retto: ma l'angolo EDP è retto pure, poichè AP è perpendicolare a PD, e DE è paralella ad AP; dunque la linea DE è perpendicolare alle due rette DP, DB; dunque è perpendicolare al loro piano MN.

Corollario I. Reciprocamente, se le rette AP, DE son perpendicolari al medesimo piano MN, saranno paralelle; poichè, se non lo fossero, conducete per il punto D una paralella ad AP, questa paralella sarà perpendicolare al piano MN; dunque si potrebbe da un medesimo punto D alzare due perpendicolari a un medesimo piano; il che è impossibile *. * 4.

Corollario II. Due linee A, e B paralelle ad una terza C sono paralelle fra loro; poichè immaginate un piano perpendicolare alla

linea C; le linee A, e B paralelle a questa perpendicolare saranno perpendicolari al medesimo piano; dunque, per il corollario precedente, saranno paralelle fra loro. Si suppone che le tre linee non siano in un medesimo piano, senza di che la proposizione sarebbe già nota *.

* 26, 1.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA

Se la linea AB *è paralella a una retta* CD *condotta nel piano* MN, *sarà paralella a questo piano.* Fig. 187.

Poichè, se la linea AB, che è nel piano ABCD, incontrasse il piano MN, ciò non potrebbe essere che in qualche punto della linea CD, intersezione comun dei due piani: ora AB non può incontrare CD, poichè le è paralella; dunque non incontrerà neppure il piano MN; dunque sarà paralella a questo piano *.

* Def. 2.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA

Due piani MN, PQ *perpendicolari a una medesima retta* AB *son paralelli fra loro.* Fig. 188.

Poichè, se s' incontrassero in qualche luogo, sia O uno dei loro punti comuni, e tirate OA, OB; la linea AB perpendicolare al piano MN è perpendicolare alla retta OA condotta dal suo piede in questo piano; per la medesima ragione AB è perpendicolare a BO; dunque OA, e OB sarebbero due per-

pendicolari abbassate dal medesimo punto O sulla medesima linea retta; il che è impossibile: dunque i piani MN, PQ non possono incontrarsi; dunque son paralelli.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA

Fig. 189. *Le intersezioni* EF, GH *di due piani paralelli* MN, PQ *con un terzo piano* FG *son paralelle.*

Poichè, se le linee EF, GH situate in uno stesso piano non son paralelle, essendo prolungate s'incontreranno; dunque i piani MN, PQ, ne' quali esse sono, s'incontrerebbero pure; dunque non sarebbero paralelli.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA

Fig. 188. *La linea* AB *perpendicolare al piano* MN *è ancor perpendicolare al piano* PQ *paralello a* MN.

Avendo tirata a piacere la linea BC nel piano PQ, per AB, e BC conducete un piano ABC, la cui intersezione col piano MN sia AD; l'intersezione AD sarà paralella a
* 10. BC*; ma la linea AB perpendicolare al piano MN è perpendicolare alla retta AD; dunque sarà pur perpendicolare alla sua paralella BC; e poichè la linea AB è perpendicolare ad ogni retta BC condotta per il suo piede nel piano PQ, ne segue ch'è perpendicolare al piano PQ.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA

Le paralelle EG, FH *comprese fra due piani paralelli* MN, PQ *sono uguali.* Fig. 189.

Per le paralelle EG, FH fate passare il piano EGHF, che incontrerà i piani paralelli in EF, e GH. Le intersezioni EF, GH son paralelle, come pure EG, FH; dunque la figura EGHF è un paralellogrammo; dunque EG=FH.

Corollario. Segue da ciò, che *due piani paralelli sono da per tutto ad ugual distanza;* poichè, se EG, e FH sono perpendicolari ai due piani MN, PQ, saranno paralelle fra loro *; dunque saranno uguali. * 7.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA

Se due angoli CAE, DBF *non situati nello stèsso piano hanno i loro lati paralelli, e diretti in un medesimo senso, questi angoli saranno uguali, e i loro piani paralelli.* Fig. 190.

Prendete AC=BD, AE=BF, e tirate CE, DF, AB, CD, EF. Poichè AC è uguale, e paralella a BD, la figura ABDC è un paralellogrammo*: dunque CD è uguale, e paralella ad AB. Per una simil ragione EF è uguale, e paralella ad AB; dunque ancora CD è uguale, e paralella ad EF: la figura CEFD è dunque un paralellogrammo, e il lato CE è uguale, e paralello a DF: dunque i triangoli * 31, 1.

CAE, DBF sono equilateri fra di loro; dunque l'angolo CAE=DBF.

In secondo luogo dico che il piano ACE è paralello al piano BDF; poichè supponiamo che il piano paralello a BDF condotto per il punto A incontri le linee EF, CD in punti diversi da C, ed E, per esempio, in G, e H; allora, secondo la proposizione XII, le tre linee AB, GD, FH saranno uguali: ma le tre AB, CD, EF lo son già; dunque si avrebbe CD=GD, e FH=EF; il che è assurdo; dunque il piano ACE è paralello a BDF.

Corollario. Se due piani paralelli MN, PQ sono incontrati da due altri piani CABD, EABF, gli angoli CAE, DBF formati dalle intersezioni dei piani paralelli saranno uguali; perchè l'intersezione AC è paralella a
* 10. BD *, AE a BF; dunque l'angolo CAE=DBF.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA

Fig. 190. *Se tre rette* AB, CD, EF *non situate nel medesimo piano sono eguali, e paralelle, i triangoli* ACE, BDF, *formati da una parte e dall' altra congiungendo l' estremità di queste rette, saranno uguali, e i loro piani saran paralelli.*

Poichè, siccome AB è uguale, e paralella a CD, la figura ABDC è un paralellogrammo; dunque il lato AC è uguale, e paralello a BD. Per la stessa ragione i lati AE, BF

sono eguali, e paralelli, come pure CF, BF; dunque i due triangoli CAE, BDF sono eguali: si proverà ancora, come nella proposizion precedente, che i loro piani son paralelli.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA

Le parti di due rette comprese tra piani paralelli sono proporzionali.

Supponiamo che la linea AB incontri i piani paralelli MN, PQ, RS in A, E, B, e che la linea CD incontri i medesimi piani in C, F, D; dico che si avrà AE : EB :: CF : FD. Fig. 191.

Tirate AD, che incontri il piano PQ in G, e conducete AC, EG, GF, BD: le intersezioni EG, BD dei piani paralelli PQ, RS col piano ABD son paralelle; dunque AE : EB :: AG : GD; parimente *, essendo paralelle le intersezioni AC, GF, si ha AG : GD :: CF : FD; dunque, a cagione del rapporto comune AG : GD, si avrà AE : EB :: CF : FD. * 10.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA

Sia ABCD *un quadrilatero qualunque situato, o non situato in un medesimo piano, se si tagliano i lati opposti proporzionalmente con due rette* EF, GH, *talmentechè si abbia* AE : EB :: DF : FC, *e* BG : GC :: AH : HD; *dico che le rette* EF, GH *si taglieran-* Fig. 192.

no in un punto M *di maniera che si avrà* HM : MG :: AE : EB, *ed* EM : MF :: AH : HD.

Conducete per AD un piano qualunque A*b*H*c*D, che non passi per GH; per i punti E, B, C, F conducete a GH le paralelle E*e*, B*b*, G*c*, F*f*, che incontrino questo piano in *e*, *b*, *c*, *f*. S' avrà primieramente, a
* 15, 3. motivo delle paralelle B*b*, GH, G*c* *, *b*H :
* 20, 3. H*c* :: BG : GC :: AH : HD; dunque * i triangoli AH*b*, *e*HD sono simili. Si avrà di più A*e* : *eb* :: AE : EB, e D*f* : *fc* :: DF : FC; dunque A*e* : *eb* :: D*f* : *fc*, o, *componendo*, A*e* : D*f* :: A*b* : D*c*. Ma, a motivo dei triangoli simili AH*b*, *c*HD, si ha A*b* : D*c* :: AH : HD; dunque A*e* : D*f* :: AH : HD; d'altronde i triangoli AH*b*, *c*HD essendo simili, l'angolo HA*e*=HD*f*; dunque
* 20, 3. i triangoli AH*e*, DH*f* sono simili *, e l' angolo AH*e*=DH*f*. Ne segue in primo luogo che *e*H*f* è una linea retta, e che perciò le tre paralelle E*e*, GH, F*f* son situate in un medesimo piano, il quale conterrà le rette EF, GH; dunque queste debbon tagliarsi in un punto M. Dipoi, a cagione delle paralelle E*e*, MH, F*f*, si avrà EM : MF :: *e*H : H*f* :: AH : HD. Con una costruzione simile facendo passare un piano per AB, si dimostrerebbe che HM : MG :: AE : EB.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA

L'angolo compreso fra' due piani MAN, MAP Fig. 193.
può esser misurato, conforme alla definizione, dall'angolo NAP, *che fanno fra loro le due perpendicolari* AN, AP *condotte in ciascuno di questi piani all'intersezione comune* AM.

Per dimostrare la legittimità di questa misura, bisogna provare 1.° che essa è costante, ossia che sarà la medesima da qualunque punto dell'intersezione comune si conducano le due perpendicolari

Infatti, se si prende un altro punto M, e si conducono MC nel piano MN, e MB nel piano MP perpendicolari all'intersezione comune AM, poichè MB, ed AP son perpendicolari a una medesima retta AM, saranno paralelle fra loro. Per la medesima ragione, MC è paralella ad AN; dunque l'angolo BMC=PAN *; dunque è indifferente il condurre le perpendicolari dal punto M, o dal punto A; l'angolo compreso sarà sempre lo stesso. * 13.

2.° Bisogna provare che se l'angolo dei due piani cresce, o diminuisce in un certo rapporto, l'angolo PAN aumenterà, o diminuirà nel rapporto medesimo.

Nel piano PAN descrivete col centro A, e con un raggio a piacere l'arco NDP; col centro M, e con un raggio uguale descrivete l'arco CEB; tirate AD a piacimento: i due

piani PAN, BMC essendo perpendicolari ad una medesima retta, saran paralelli *, dunque le intersezioni AD, ME di questi due piani con un terzo AMD saran paralelle; dunque l' angolo BME sarà eguale a PAD *.

* 9.

* 13.

Chiamiamo, per un momento, *canto* l'angolo formato da' due piani PM, MN: posto ciò, se l' angolo DAP fosse uguale a DAN, è chiaro che il *canto* DAMP sarebbe ugnale al *canto* DAMN, perchè la base DAP si situerebbe esattamente sulla sua ugnale DAN, l' altezza AM sarebbe sempre la stessa: dunque i due *canti* coinciderebbero l' uno coll' altro. Si vede del pari che se l' angolo DAP fosse contenuto un certo numero preciso di volte nell' angolo PAN, il *canto* DAMP sarebbe contenuto altrettante volte nel *canto* PAMN. D' altronde dal rapporto in numeri interi a un rapporto qualunque la conclusione è legittima, ed è stata dimostrata tale in un' occasione interamente simile *; dunque, qualunque sia il rapporto dell' angolo DAP all' angolo PAN, il *canto* DAMP sarà nel medesimo rapporto col *canto* PAMN; dunque l' angolo NAP può esser preso per la misura del *canto* PAMN, o dell' angolo, che fanno fra loro i due piani MAP, MAN.

* 17,2.

Scolio. Quando due piani si traversano scambievolmente, si forman quattro angoli, di cui gli opposti al vertice sono uguali, e i due adjacenti equivalgono a due angoli retti; dunque, se un piano è perpendicolare ad

un altro, questo secondo è pur perpendicolare al primo. Parimente nell'incontro dei piani paralelli con un terzo piano si avranno le medesime uguaglianze d'angoli, e le medesime proprietà che nell'incontro di due linee paralelle con una terza.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA

Essendo la linea AP *perpendicolare al piano* MN, *ogni piano* APB *condotto per* AP *sarà perpendicolare al piano medesimo* MN. Fig. 194.

Sia BC l'intersezione dei piani AB, MN; se nel piano MN si conduce DE perpendicolare a BP, la linea AP, essendo perpendicolare al piano MN, sarà perpendicolare a ciascuna delle due rette BC, DE: ma l'angolo APD, formato dalle due perpendicolari PA, PD all'intersezione comune BP, è l'angolo dei due piani AB, MN; dunque, poichè quest'angolo è retto, i due piani son perpendicolari fra loro.

Scolio. Quando tre rette, come AP, BP, DP, son perpendicolari fra loro, ciascuna di queste linee è perpendicolare al piano dell'altre due, e i tre piani son perpendicolari fra loro.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA

Se il piano APB *è perpendicolare al piano* MN, *e se si conduca nel piano* APB *la linea* PA *perpendicolare all'intersezione comune* Fig. 194.

PB, *dico che* PA *sarà perpendicolare al piano* MN.

Poichè, se nel piano MN si conduce DP perpendicolare a PB, l'angolo APD sarà retto, giacchè i piani son perpendicolari fra loro: dunque la linea AP è perpendicolare alle due rette PB, PD; dunque è perpendicolare al loro piano MN.

Corollario. Se il piano AB è perpendicolare al piano MN, e per un punto P dell'intersezione comune si alza una perpendicolare al piano MN, dico che questa perpendicolare sarà nel piano AB; poichè, se non vi fosse, si potrebbe condurre nel piano AB la perpendicolare AP all'intersezione comune BP, la quale sarebbe nel medesimo tempo perpendicolare al piano MN; dunque nel medesimo punto P vi sarebbero due perpendicolari al piano MN; il che è impossibile *.

* 4.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA

Fig. 194. *Se due piani* AB, AD *sono perpendicolari ad un terzo* MN, *la loro intersezione comune* AP *sarà perpendicolare a questo terzo piano*.

Poichè, se per il punto P si alza una perpendicolare al piano MN, questa perpendicolare dee trovarsi ad un tempo nel piano AB, e nel piano AD *; dunque è la loro comune intersezione AP.

* 19.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA

Se un angolo solido è formato da tre angoli piani, la somma di due qualunque di questi angoli sarà maggiore del terzo.

Non v'è bisogno di dimostrar la proposizione se non quando uno degli angoli piani è maggior di ciascuno degli altri due. Sia dunque l'angolo solido S formato da tre angoli piani ASB, ASC, BSC, e supponiamo che l'angolo ASB sia il più grande di essi; dico che sarà ASB<ASC+BSC. Fig. 195.

Nel piano ASB fate l'angolo BSD=BSC; tirate a piacere ADB; ed avendo preso SC=SD, tirate AC, BC.

I due lati BS, SD sono uguali ai due BS, SC, l'angolo BSD=BSC; dunque i due triangoli BSD, BSC sono uguali; dunque BD=BC. Ma AB<AC+BC; togliendo da una parte BD, dall'altra BC, resterà AD<AC. I due lati AS, SD sono uguali ai due AS, SC, il terzo AD è minore del terzo AC; dunque * l'angolo ASD<ASC. Aggiungendo BSD=BSC, si avrà ASD+BSD, o ASB<ASC+BSC. * 10, 1.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA

La somma degli angoli piani, che formano un angolo solido, è sempre minore di quattro angoli retti.

Tagliate l'angolo solido S con un piano Fig. 196.

qualunque ABCDE; da un punto O preso in questo piano conducete a tutti gli angoli le linee rette OA, OB, OC, OD, OE.

Gli angoli di tutti i triangoli ASB, BSC, ec. formati intorno al vertice S, presi insieme, equivalgono a tutti gli angoli d'un simil numero di triangoli AOB, BOC, ec., formati intorno al vertice O. Ma al punto B gli angoli ABO, OBC presi insieme fanno l'angolo ABC minor della somma degli angoli ABS, SBC *; parimente al punto C si ha BCO+OCD<BCS+SCD; e così rispetto a tutti gli angoli del poligono ABCDE. Segue da ciò che nei triangoli il cui vertice è in O, la somma degli angoli alla base è minor della somma degli angoli alla base dei triangoli, il cui vertice è in S; dunque in compensazione la somma degli angoli formati intorno al punto O è maggiore della somma degli angoli intorno al punto S. Ma la somma degli angoli intorno al punto O è uguale a quattro angoli retti *; dunque la somma degli angoli piani, che formano l'angolo solido S, è minore di quattro angoli retti.

* 21.

* 5, 1.

Scolio. Questa dimostrazione suppone che l'angolo solido sia *convesso*, ossia che il piano d'una faccia prolungato non possa mai tagliare l'angolo solido; se fosse altrimenti, la somma degli angoli piani non avrebbe più limite, e potrebb'essere d'una grandezza qualunque.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA

Se due angoli solidi son composti di tre angoli piani respettivamente uguali, i piani, nei quali sono gli angoli uguali, saranno ugualmente inclinati fra loro.

Sia l'angolo ASC=DTF, l'angolo ASB=DTE, e l'angolo ESC=ETF; dico che i due piani ASC, ASB avranno fra loro la medesima inclinazion dei due piani DTF, DTE. Fig. 197.

Avendo preso SB a piacere, conducete BO perpendicolare al piano ASC; dal punto O, dove questa perpendicolare incontra il piano, conducete OA, OC perpendicolari sopra SA, SC; tirate AB, BC; prendete dipoi TE=SB; conducete EP perpendicolare sul piano DTF; dal punto P conducete PD, PF perpendicolari sopra TD, DF; infine tirate DE, EF.

Il triangolo SAB è rettangolo in A, ed il triangolo TDE in D *; e, poichè l'angolo ASB=DTE, si ha pure SBA=TED. D'altronde SB=TE; dunque il triangolo SAB è uguale al triangolo TDE; dunque SA=TD, e AB=DE. Si dimostrerà similmente che SC=TF, e BC=EF. Posto ciò, il quadrilatero SAOC è uguale al quadrilatero TDPF; poichè, ponendo l'angolo ASC sul suo uguale DTF, a cagione di SA=TD, e SC=TF, il punto A cadrà in D, ed il punto C in F. Nel medesimo tempo AO perpendicolare a SA cadrà sopra DP perpendicolare a TD, e parimente OC sopra PF; dunque il punto * 6.

O cadrà sul punto P, e si avrà AO=DP. Ma i triangoli AOB, DPE son rettangoli in O, e P, l'ipotenusa AB=DE, e il lato AO=DP; dunque questi triangoli sono uguali * 18. 1.; dunque l'angolo OAB=PDE. L'angolo OAB è l'inclinazione dei due piani ASB, ASC; l'angolo PDE è quella dei due piani DTF, DTE; dunque queste due inclinazioni sono uguali fra loro.

Bisogna osservare frattanto che l'angolo A del triangolo rettangolo OAB non è propriamente l'inclinazione dei due piani ASB, ASC, se non quando la perpendicolare BO cade per rapporto a SA dalla medesima parte di SC; se cadesse dall'altra parte, allora l'angolo dei due piani sarebbe ottuso, ed unito all'angolo A del triangolo OAB farebbe due angoli retti. Ma, nel medesimo caso, l'angolo dei due piani TDE, TDF sarebbe parimente ottuso, ed unito all'angolo D del triangolo DPE farebbe due angoli retti; dunque, siccome l'angolo A sarebbe sempre uguale a D, si conchiuderebbe parimente che l'inclinazion dei due piani ASB, ASC è uguale a quella dei due piani TDE, TDF.

Scolio. Se due angoli solidi son composti di tre angoli piani respettivamente uguali, e se al tempo stesso gli angoli uguali, od omologhi sono *disposti della stessa maniera* nei due angoli solidi, allora questi angoli solidi saranno uguali, e posti l'uno sull'altro coincideranno. In fatti si è già veduto che il quadrilatero SAOC può esser situato

sul suo uguale TDPF; così situando SA sopra TD, SC cade sopra TF, e il punto O sul punto P. Ma, a cagione dell'uguaglianza dei triangoli AOB, DPE, la OB perpendicolare al piano ASC è uguale alla PE perpendicolare al piano TDF; di più queste perpendicolari son dirette nel medesimo senso; dunque il punto B cadrà sul punto E, la linea retta SB sopra TE, ed i due angoli solidi coincideranno interamente l'uno coll'altro.

Questa coincidenza però non ha luogo se non in quanto gli angoli piani uguali sono *disposti della maniera medesima* nei due angoli solidi; poichè, se gli angoli piani uguali fosser *disposti in un ordin inverso*, o, il che torna lo stesso, se le perpendicolari OB, PE, invece d'esser dirette nel medesimo senso per rapporto ai piani ASC, DTF, fosser dirette in senso contrario, allora sarebbe impossibile di far coincidere i due angoli solidi l'uno coll'altro. Non sarebbe però meno vero, conforme al teorema, che i piani nei quali sono gli angoli uguali, fossero ugualmente inclinati fra loro; talmente che i due angoli solidi sarebbero uguali in tutte le loro parti costituenti, senza però poter essere soprapposti. Questa specie d'uguaglianza, che non è assoluta, o di soprapposizione, merita d'esser distinta con una denominazione particolare: noi la chiameremo *uguaglianza per simmetria*. Così i due angoli solidi, di cui si tratta, che son formati da tre angoli respettivamente uguali, ma disposti in un

ordine inverso, si chiameranno *angoli eguali per simmetria*, o semplicemente *angoli simmetrici*.

La medesima osservazione s'applica agli angoli solidi formati da più di tre angoli piani: così un angolo solido formato dagli angoli piani A, B, C, D, E, ed un altro angolo solido formato dai medesimi angoli in un ordine inverso A, E, D, C, B posson essere tali che i piani, nei quali sono gli angoli uguali, siano ugualmente inclinati fra loro. Questi due angoli solidi, che sarebbero uguali senza che fosse possibile la lor soprapposizione, si chiameranno *angoli uguali per simmetria*, o *angoli simmetrici*.

Nelle figure piane propriamente non vi è *eguaglianza per simmetria*, e tutte quelle, che si volessero chiamar così, sarebbero eguaglianze assolute, o di soprapposizione. La ragione è questa che si può rovesciare una figura piana, e prendere indifferentemente il di sopra per il di sotto: accade diversamente nei solidi, ove la terza dimensione può esser presa in due sensi diversi.

PROPOSIZIONE XXIV.

PROBLEMA

Essendo dati i tre angoli piani, che formano un angolo solido, trovare con una costruzione lineare piana l'angolo, che due di questi piani fanno fra loro.

Fig. 178. Sia S l'angolo solido già costrutto, nel qual si conoscano i tre angoli piani ASB,

ASC, BSC; si cerca l'angolo, che fanno fra loro due di questi piani, per esempio, i piani ASB, ASC.

Immaginiamo che si sia fatta la stessa costruzione come nel teorema precedente; l'angolo OAB sarebbe l'angol richiesto. Si tratta dunque di trovare il medesim' angolo con una costruzione lineare-piana, o fatta sopra un piano.

A tal oggetto fate sopra un piano gli angoli B'SA, ASC, B''SC uguali agli angoli BSA, ASC, BSC della figura solida; prendete B'S, e B''S uguali ciascuno a BS della figura solida; dai punti B', e B'' abbassate B'A, e B''C perpendicolari sopra SA, e SC, che s'incontrino in un punto O. Dal punto A, come centro, e col raggio AB' descrivete la mezza circonferenza B'*b*E: dal punto O alzate sopra B'E la perpendicolare O*b*, che incontra la circonferenza in *b*; tirate A*b*; e l'angolo EA*b* sarà l'inclinazione cercata dei due piani ASC, ASB nell'angolo solido.

Tutto si riduce a far vedere che il triangolo AO*b* della figura piana è uguale al triangolo AOB della figura solida. Ora i due triangoli B'SA, BSA son rettangoli in A', e gli angoli in S sono uguali; dunque gli angoli in B, e B' son parimente uguali. Ma l'ipotenusa SB' è uguale all'ipotenusa SB; dunque questi triangoli sono uguali: dunque SA della figura piana è uguale a SA della figura solida, ed anche AB', o la sua uguale A*b* nella figura piana è uguale ad AB nella

figura solida. Si dimostrerà pure che SC è uguale dalle due parti; d'onde ne segue che il quadrilatero SAOC è uguale in ambedue le figure, e che così AO della figura piana è uguale ad AO della figura solida; dunque nell'una, e nell'altra i triangoli rettangoli AO*b*, AOB hanno l'ipotenusa uguale, ed un lato uguale; dunque sono uguali, e l'angolo EA*b* trovato colla costruzione lineare-piana è uguale all'inclinazion dei due piani SAB, SAC nell'angolo solido.

Quando il punto O cada fra A, e B′ nella figura piana, l'angolo EA*b* diventa ottuso, e misura sempre la vera inclinazione dei piani. Perciò si è indicata con EA*b*, e non con OA*b* l'inclinazione richiesta, affinchè la medesima soluzione convenga a tutti i casi senza eccezione.

Scolio. Si potrebbe domandare se, prendendo tre angoli a piacere, si potrà formare un angolo solido con questi tre angoli piani.

Primieramente bisogna che la somma dei tre angoli dati sia minore di quattro angoli retti, senza di che l'angolo solido non può esser formato: bisogna di più che dopo aver preso due degli angoli a piacimento B′SA, ASC, il terzo CSB″ sia tale che la perpendicolare B″C al lato SC incontri il diametro B′E fra le sue estremità B′, ed E. Quindi è che i limiti della grandezza dell'angolo CSB″ sono quelli, che fanno andare la perpendicolare B″C ai punti B′, ed E. Da questi punti abbassate sopra SC le perpendicolari B′I, EK,

che incontrino in I, e K la circonferenza descritta col raggio SB″; ed i limiti dell'angolo CSB″ saranno CSI, e CSK.

Ma nel triangolo isoscele B′SI, essendo la linea SC prolungata perpendicolare alla base B′I, si ha l'angolo CSI=CSB′=ASC+ASB′. E nel triangolo isoscele ESK, essendo la linea SC perpendicolare ad EK, si ha l'angolo CSK=CSE. D'altronde, a cagione dei triangoli uguali ASE, ASB′, l'angolo ASE=ASB′; dunque CSE, o CSK=ASC—ASB′.

Risulta da ciò che il problema sarà possibile ogni volta che il terzo angolo CSB′ sarà minor della somma degli altri due ASC, ASB′, e maggiore della lor differenza; condizione, che si accorda col teorema XXI; poichè, in virtù di un tal teorema, bisogna che si abbia CSB″<ASC+ASB′, e bisogna pure che sia ASC<CSB″+ASB′, o CSB″>ASC —ASB′.

PROPOSIZIONE XXV.

PROBLEMA

Essendo dati due dei tre angoli piani, che formano un angolo solido, coll'angolo, che i loro piani fanno fra loro, trovare il terzo angolo piano.

Siano ASC, ASB′ i due angoli piani dati, Fig. 198
e supponiamo, per un momento, che CSB″ sia il terzo angolo, che si cerca; allora, facendo la medesima costruzione del problema precedente, l'angolo compreso tra' piani dei due primi sarebbe EA*b*. Ora nello stesso

modo che si determina l'angolo EA*b* col mezzo di CSB″ essendo dati gli altri due, così si può determinare CSB″ col mezzo di EA*b*; il che risolverà il problema proposto.

Avendo preso SB′ a piacere, abbassate sopra SA la perpendicolare indefinita B′E; fate l'angolo EA*b* uguale all'angolo dei due piani dati; dal punto *b*, ove il lato A*b* incontra la circonferenza descritta col centro A, e col raggio AB′, abbassate sopra AE la perpendicolare *b*O, e dal punto O abbassate sopra SC la perpendicolare indefinita OCB″, che terminerete in B″ di modo che SB″=SB′: l'angolo CSB″ sarà il terzo angolo piano richiesto.

Perchè, se si facesse un angolo solido coi tre angoli piani B′SA, ASC, CSB″, l'inclinazione dei piani, ove sono gli angoli dati ASB′, ASC, sarebbe uguale all'angolo dato EA*b*.

Fig. 199. *Scolio*. Se un angolo solido è *quadruplo*, o formato da quattro angoli piani ASB, BSC, CSD, DSA, la cognizione di questi angoli non basta per determinare le inclinazioni scambievoli dei loro piani; poichè coi medesimi angoli piani si potrebbe formare un'infinità d'angoli solidi. Ma, se si aggiunga una condizione, per esempio, se sia data l'inclinazion dei due piani ASB, BSC, allora l'angolo solido è intieramente determinato, e si potrà trovare l'inclinazione di due qualunque dei suoi piani. Infatti imaginate un angolo solido *triplo* formato dagli angoli

piani ASB, BSC, ASC; i due primi angoli sono dati, come pure l'inclinazion dei lor piani; si potrà dunque determinare mediante il problema presente il terzo angolo ASC. Dipoi, se si considera l'angolo solido *triplo* formato dagli angoli piani ASC, ASD, DSC, questi tre angoli son cogniti, onde l'angolo solido è interamente determinato. Ma l'angolo solido *quadruplo* è formato dalla riunione dei due angoli solidi *tripli*, di cui parliamo: dunque, poichè questi angoli parziali son noti, e determinati, l'angolo totale sarà parimente noto, e determinato.

L'angolo dei due piani ASD, DSC si troverebbe immediatamente col mezzo del secondo angolo solido parziale. In quanto all'angolo dei due piani BSC, CSD bisognerebbe in un angolo solido parziale cercar l'angolo compreso fra i due piani BSC, ASC, e nell'altro l'angolo compreso fra i due piani ASC, DSC; la somma di questi due angoli sarebbe l'angolo compreso fra i piani BSC, DSC.

Si troverà nella stessa maniera che, per determinare un angolo solido *quintuplo*, bisogna conoscere, oltre ai cinque angoli piani, che lo compongono, due delle inclinazioni scambievoli dei loro piani. Ne bisognerebbero tre nell'angolo solido *sestuplo*; e così in seguito.

LIBRO SESTO

I POLIEDRI

DEFINIZIONI

1. Si chiama *solido poliedro*, o semplicemente *poliedro* ogni solido terminato da piani, o faccie piane. (Questi piani sono necessariamente terminati da linee rette). Si chiama in particolare *tetraedro* il solido, che ha quattro faccie; *essaedro* quello, che ne ha sei; *ottaedro* quello, che ne ha otto; *dodecaedro* quello, che ne ha dodici; *icosaedro* quello, che ne ha venti, ec.

Il *tetraedro* è il poliedro più semplice, perchè bisognano almeno tre piani per formare un angolo solido, e questi tre piani lasciano un vuoto, che per esser chiuso, esige almeno un quarto piano.

2. L' intersezione comune di due faccie adjacenti d'un poliedro si chiama *lato*, *spigolo*, o *costola* del poliedro.

3. Si chiama *poliedro regolare* quello, di cui tutte le faccie son poligoni regolari uguali, e di cui tutti gli angoli solidi son uguali fra loro. Questi poliedri son in nu-

mero di cinque. *Vedete l' Appendice ai Libri* VI. *e* VII.

4. Il *prisma* è un solido compreso da più piani paralellogrammi, terminati da una parte e dall' altra da piani poligoni eguali, e paralelli.

Per costruir questo solido, sia ABCDE un poligono qualunque; se in un piano paralello ad ABC si conducon le linee FG, GH, HI, ec. eguali, e paralelle ai lati AB, BC, CD, ec., si formerà con questi il poligono FGHIK eguale ad ABCDE; e se in seguito si uniscon da un piano all' altro i vertici degli angoli omologhi con le rette AF, BG, CH, ec., le faccie ABGF, BCHG, ec. saranno paralellogrammi, ed il solido così formato ABCDEFGHIK sarà un prisma. Fig. 200.

5. I poligoni uguali, e paralelli ABCDE, FGHIK si chiamano le *basi del prisma;* gli altri piani paralellogrammi presi insieme costituiscono ciò, che si chiama la *superficie laterale*, o *convessa* del *prisma*.

6. L'*altezza d' un prisma* è la distanza delle sue basi, o la perpendicolare abbassata da un punto della base superiore sopra il piano della base inferiore.

7. Un *prisma* è *retto* quando i suoi lati AF, BG, ec. son perpendicolari ai piani delle basi; allora ciascuno di questi lati è uguale all' altezza del prisma. In ogni altro caso il prisma è *obliquo*, e l'altezza è minore del lato.

8. Un *prisma* è *triangolare*, *quadrango-*

lare, pentagono, esagono ec. secondo che la base è un triangolo, un quadrilatero, un pentagono, un esagono, ec.

Fig. 206. 9. Il prisma, che ha per base un paralellogrammo, ha tutte le sue faccie paralellogramme, e si chiama *paralellepipedo*.

Il *paralellepipedo* è *rettangolo* quando tutte le sue faccie sono rettangoli.

10. Tra i paralellepipedi rettangoli si distingue il *cubo*, o *essaedro* regolare compreso da sei quadrati uguali.

Fig. 196. 11. La *piramide* è il solido, che vien formato quando più piani triangolari, che partono da un medesimo punto S, terminano ad un medesimo piano poligono ABCDE.

Il poligono ABCDE si chiama la *base* della piramide; il punto S n'è il vertice, e il complesso dei triangoli ASB, BSC, ec. forma la *superficie convessa o laterale* della piramide.

12. L'*altezza* della piramide è la perpendicolare abbassata dal vertice sul pian della base, prolungato se bisogna.

13. La piramide è *triangolare, quadrangolare* ec. secondo che la base è un triangolo, un quadrilatero, ec

14 Una piramide è *regolare* quando la base è un poligono regolare, e nel tempo stesso la perpendicolare abbassata dal vertice sul pian della base passa per il di lei centro. Questa linea si chiama allora l'*asse* della piramide.

15. *Diagonale* d'un poliedro è la linea congiungente i vertici di due angoli solidi non adjacenti.

16. Chiamerò *poliedri simmetrici* due poliedri, che, avendo una base comune, sono costrutti similmente, uno al di sopra del piano di questa base, l'altro al di sotto, in modo che gli angoli solidi omologhi siano situati ad uguali distanze dal pian della base sopra una medesima retta perpendicolare a questo piano.

Per esempio, se la retta ST è perpendicolare al piano ABC, e se nel punto O, ove incontra questo piano, sia divisa in due parti uguali, le due piramidi SABC, TABC, che hanno la base comune ABC, saranno due poliedri simmetrici. Fig. 202.

17. Due *piramidi triangolari* son *simili* quando hanno due faccie respettivamente simili, similmente poste, ed ugualmente inclinate fra loro.

Così, supponendo gli angoli ABC=DEF, BAC=EDF, ABS=DET, BAS=EDT, se in oltre l'inclinazione dei piani ABS, ABC è uguale a quella dei loro omologhi DTE, DEF, le piramidi SABC, TDEF saranno simili. Fig. 203.

18. Avendo formato un triangolo con tre angoli presi sopra una medesima faccia, o base d'un poliedro, si può immaginare che i vertici dei differenti angoli solidi del poliedro, situati fuori del piano di questa base, sien quelli d'altrettante piramidi triangolari, che hanno per base comune il triangolo indicato; e ciascuna di queste piramidi determinerà la posizione di ciascun angolo so-

lido del poliedro per rapporto alla base. Posto ciò,

Due *poliedri* son *simili* quando, avendo basi simili, i vertici degli angoli solidi omologhi fuori di queste basi sono determinati da piramidi triangolari respettivamente simili.

19. Chiamerò *vertici* d' un poliedro i punti situati ai vertici dei suoi differenti angoli solidi.

N. B. Tutti i poliedri, che noi consideriamo, son poliedri cogli angoli in fuori, o poliedri *convessi*. Chiamiamo così quelli, la cui superficie non può esser incontrata da una linea retta in più di due punti. In questa specie di poliedri il piano d' una faccia prolungato non può tagliare il solido; è dunque impossibile che il poliedro sia in parte al di sopra del pian d' una faccia, in parte al di sotto; esso è tutto da una medesima parte di un tal piano.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA

Due poliedri non possono avere i medesimi vertici, ed in numero uguale senza coincidere l' uno coll' altro.

Poichè, supponiamo uno dei poliedri già costrutto; se si vuol costruirne un altro, che abbia i medesimi vertici, ed in numero uguale, bisognerà che i piani di questo non passino tutti per i medesimi vertici, per cui passan nel primo; senza di che non differirebbero l' uno dall' altro. Ma allora è chiaro che alcuni dei nuovi piani taglierebbero il

primo poliedro; vi sarebbero dei vertici al di sopra di questi piani, e dei vertici parimente al di sotto; il che non può convenire a un poliedro convesso: dunque, se due poliedri hanno i medesimi vertici, ed in numero uguale, debbono necessariamente coincidere l'uno con l'altro.

Scolio. Essendo dati di posizione i punti A, B, C, K, ec., che debbon servire di vertici a un poliedro, è facile descrivere il poliedro.

Scegliete prima tre vertici vicini D, E, H tali, che il piano DEH passi, se ciò ha luogo, per dei nuovi vertici K, C, ma lasci tutti gli altri da una medesima parte, cioè, tutti al di sopra del piano, o tutti al di sotto. Il piano DEH, o DEHKC così determinato sarà una faccia del solido. Per uno de' suoi lati EH conducete un piano, che farete girare finchè incontri un nuovo vertice F, o più insieme F, I; avrete una seconda faccia, che sarà FEH, o FEHI. Continuate così, facendo passare dei piani per i lati trovati finchè il solido sia terminato da tutte le parti; questo solido sarà il poliedro richiesto, perchè non ve ne son due, che possan passare per i medesimi vertici. Fig. 204.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA

Due poliedri simmetrici hanno le faccie omologhe respettivamente uguali; e l'inclinazione di due faccie adjacenti in uno di

questi poliedri è uguale all' inclinazione delle faccie omologhe nell' altro.

Fig. 203. Sia ABCDE la base comune ai due poliedri; siano M, e N i vertici di due angoli solidi qualunque d' uno dei poliedri; M′, e N′ i vertici omologhi dell' altro poliedro; bisognerà, secondo la definizione, che le rette MM′, NN′ siano perpendicolari al piano ABC, e siano divise in due parti uguali nei punti *m*, e *n*, ove incontrano questo piano. Posto ciò, dico che la distanza MN è uguale a M′N′.

Poichè, se si fa girare il trapezio *m*M′N′*n* intorno a *mn* finchè il suo piano si applichi al piano *m*MN*n*, a cagione degli angoli retti in *m*, ed in *n*, il lato *m*M′ cadrà sul suo uguale *m*M, e *n*N′ sopra *n*N; dunque i due trapezj coincideranno, e si avrà MN= M′N′.

Sia P un terzo vertice del poliedro superiore, e P′ il suo omologo nell' altro; si avrà pure MP=M′P′, e NP=N′P′; dunque *il triangolo* MNP, *che unisce tre vertici qualunque del poliedro superiore è uguale al triangolo* M′N′P′, *che unisce i tre vertici omologhi dell' altro poliedro.*

Se tra questi triangoli si consideran soltanto quelli, che son formati alla superficie dei poliedri, si può già conchiudere che le superficie dei due poliedri son composte d' un medesimo numero di triangoli respettivamente uguali.

Dico adesso che, se alcuni triangoli d' una

superficie sono in un medesimo piano, e formano una medesima faccia poligona, i triangoli omologhi saranno in un medesimo piano sopra l'altra superficie, e formeranno una faccia poligona uguale.

Infatti siano MPN, NPQ due triangoli adjacenti, che si suppongono in uno stesso piano; e siano M′P′N′, N′P′Q′ i loro omologhi. Si ha l'angolo MNP=M′N′P′; l'angolo PNQ=P′N′Q′; e, se si tirano MQ, e M′Q′, il triangolo MNQ sarebbe uguale a M′N′Q′; perciò si avrebbe l'angolo MNQ= M′N′Q′. Ma, poichè MPNQ è un solo piano, si ha l'angolo MNQ=MNP+PNQ. Dunque si avrà pure M′N′Q′=M′N′P′+P′N′Q′. Or, se i tre piani M′N′P′, P′N′Q′, M′N′Q′ non fossero confusi in un solo, questi tre piani formerebbero un angolo solido, e si avrebbe * l'angolo M′N′Q′<M′N′P′+P′N′Q′. Dunque, poichè questa condizion non ha luogo, i due triangoli M′N′P′, P′N′Q′ sono in un medesimo piano. * 20, 5.

Segue da ciò che ciascuna faccia, o triangolare, o poligona, d'un poliedro corrisponde a una faccia uguale nell'altro, e che perciò i due poliedri son compresi da un medesimo numero di piani respettivamente uguali.

Resta a provare che l'inclinazione di due faccie adjacenti qualunque in uno dei poliedri è uguale all'inclinazione delle due faccie omologhe nell'altro.

Siano MPN, NPQ due triangoli formati

sulla costola comune NP nei piani di due faccie adjacenti; siano M′P′N′, N′P′Q′ i loro omologhi: si può concepire in N un angolo solido formato dai tre angoli piani MNQ, MNP, PNQ, e in N′ un angolo solido formato dai tre M′N′Q′, M′N′P′, P′N′Q′. Ora abbiam già provato che questi angoli piani son respettivamente uguali; dunque l'inclinazione dei due piani MNP, PNQ è uguale a quella dei loro omologhi M′N′P′, P′N′Q′ *.

* 22, 5.

Dunque nei poliedri simmetrici le faccie son respettivamente uguali, e i piani di due faccie qualunque adjacenti in uno dei solidi hanno tra loro la medesima inclinazione che i piani di due faccie omologhe nell'altro solido.

Scolio. Si può osservare che gli angoli solidi di un poliedro son simmetrici rispetto agli angoli solidi dell'altro poliedro: poichè, se l'angolo solido N è formato dai piani MNP, PNQ, QNR, ec., il suo omologo N′ è formato dai piani M′N′P′, P′N′Q′, Q′N′R′, ec.; e questi sono disposti nel medesim' ordin degli altri Ma, siccome i due angoli solidi sono in una situazione inversa l'uno per rapporto all'altro, ne segue che la disposizione reale dei piani, che formano l'angolo solido N′, è l'inversa di quella, che ha luogo nell'angolo omologo N. D'altronde le inclinazioni dei piani consecutivi sono uguali nell'uno, e nell'altro angolo solido. Dunque gli angoli solidi son simmetrici l'uno coll'altro. *Vedete lo scolio della proposizione* XXIII. Lib. V.

Quest' osservazione prova che un poliedro qualunque non può avere che un solo poliedro *simmetrico* Poichè, se si costruisse sopra un' altra base un nuovo poliedro *simmetrico* col poliedro dato, gli angoli solidi di questo sarebbero sempre *simmetrici* cogli angoli del poliedro dato. Dunque sarebbero uguali a quelli del poliedro *simmetrico* costrutto sulla prima base. D' altronde le faccie omologhe sarebbero sempre uguali. Dunque i poliedri *simmetrici* costrutti sopra una base, o sopra un' altra avrebbero le faccie uguali, e gli angoli solidi uguali; dunque coinciderebbero mediante la soprapposizione, e formerebbero un solo, e medesimo poliedro.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA

Due prismi sono uguali allorchè hanno un angolo solido compreso fra tre piani respettivamente uguali, e similmente posti.

Sia la base ABCDE uguale alla base *abcde*, il paralellogrammo ABGF uguale al paralellogrammo *abgf*, e il paralellogrammo BCHG uguale al paralellogrammo *bchg*; dico che il prisma ABCI sarà uguale al prisma *abci*. Fig. 200.

Poichè, sia situata la base ABCDE sulla sua uguale *abcde*, queste due basi coincideranno; ma i tre angoli piani, che formano l'angolo solido B, sono respettivamente uguali ai tre angoli piani, che formano l'angolo solido *b*, cioè, ABC=*abc*, ABG=*abg*, e GBC=*gbc*; di più questi angoli son simil-

mente posti; dunque gli angoli solidi B, e *b* sono uguali, e per conseguenza il lato BG cadrà sul suo uguale *bg*. Si vede pure che, a cagione dei paralellogrammi uguali ABGF, *abgf*, il lato GF cadrà sul suo uguale *gf*, e similmente GH sopra *gh*; dunque la base superiore FGHIK coinciderà interamente colla sua uguale *fghik*, ed i due solidi saranno confusi in un solo, poichè avranno i medesimi vertici *. Dunque *due prismi sono uguali* ec.

* 1.

Corollario, *Due prismi retti, che hanno basi eguali, ed altezze eguali, sono eguali*. Perchè avendo il lato AB eguale ad *ab*, e l'altezza BG eguale a *bg*, il rettangolo ABGF sarà eguale al rettangolo *abgf*; sarà lo stesso dei rettangoli BGFC, *bgfc*; e così i tre piani, che forman l'angolo B, son uguali ai tre, che forman l'angolo solido *b*. Dunque i due prismi sono eguali.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA

In ogni paralellepipedo i piani opposti sono uguali, e paralelli.

Fig 206. Poichè, secondo la definizione di questo solido, le basi ABCD, EFGH son paralellogrammi uguali, e i loro lati son paralelli; resta dunque a dimostrare che la medesima cosa ha luogo per due faccie laterali opposte, come AEHD, BFGC. Ora AD è uguale, e paralella ad AB, giacchè la figura ABCD è un paralellogrammo; per una simil ragio-

ne AE è uguale, e paralella a BF: dunque l'angolo DAE è uguale all'angolo CBF *, e il piano DAE paralello a CBF. Dunque anche il paralellogrammo DAEH è uguale al paralellogrammo CBFG. Si dimostrerà del pari che i paralellogrammi ABFE, DCGH sono uguali, e paralelli. * 13, 5.

Corollario. Poichè il paralellepipedo è un solido compreso da sei piani, di cui gli opposti sono uguali, e paralelli, ne segue che una faccia qualunque, e la sua opposta possono esser prese per le basi del paralellepipedo.

Scolio. Essendo date tre rette AB, AE, AD, che passino per un medesimo punto A, e facciano fra loro degli angoli dati, si può su queste tre rette costruire un paralellepipedo AG: a tal effetto bisogna condurre dall'estremità di ciascuna retta un piano paralello al piano dell'altre due, cioè, per il punto B un piano paralello a DAE, per il punto D un piano paralello a BAE, e per il punto E un piano paralello a BAD. Gli incontri scambievoli di questi piani formeranno il paralellepipedo richiesto.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA

In ogni paralellepipedo gli angoli solidi opposti son simmetrici, e le diagonali condotte dai vertici di questi angoli si tagliano scambievolmente in due parti uguali.

Paragoniamo, per esempio, l'angolo soli- Fig. 106.

do A al suo opposto G; l'angolo EAB uguale ad EFB è pure uguale a HGC, l'angolo DAE=DHE=CGF, e l'angolo DAB=DCB=HGF. Dunque i tre angoli piani, che formano l'angolo solido A, sono respettivamente uguali ai tre, che formano l'angolo solido G. Ma, siccome sono disposti differentemente nei due angoli solidi, ne segue 1.° che questi due angoli A, e G sono
* 23, 5. simmetrici l'uno coll'altro *.

In secondo luogo immaginiamo due diagonali qualunque EC, AG condotte da dei vertici opposti: poichè AE è uguale, e paralella a CG, la figura AEGC è un paralellogrammo; dunque le diagonali EC, AG si taglieranno scambievolmente in due parti uguali. Si dimostrerà ancora che la diagonale EC, ed un' altra DF si taglieranno pure in due parti uguali: dunque 2.° le quattro diagonali si taglieranno scambievolmente in due parti uguali in un medesimo punto, che si può riguardare come il centro del paralellepipedo.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA

Fig. 207. *Il piano* BDHF, *che passa per due costole paralelle opposte* BF, DH, *divide il paralellepipedo* AG *in due prismi triangolari* ABDHEF, GHFBCD *simmetrici l'uno coll' altro.*

In primo luogo questi due solidi son prismi, perchè i triangoli ABD, EFH, avendo i loro lati uguali, e paralelli, sono uguali,

e nel tempo stesso le faccie laterali ABFE, ADHE, BDHF son paralellogrammi; dunque il solido ABDHEF è un prisma: lo stesso è del solido GHFBCD. Dico adesso che questi due prismi son simmetrici l'uno dell'altro.

Sulla base ABD fate il prisma ABDE′F′H′, che sia simmetrico col prisma ABDEFH. Secondo, ciò ch'è stato già dimostrato *, il piano ABF′E′ è uguale ad ABFE, ed il piano ADH′E′ è uguale ad ADHE: ma, se si paragona il prisma GHFBCD al prisma ABDH′E′F′, la base GHF è uguale ad ABD, il paralellogrammo GHDC, che è uguale ad ABFE, è pure uguale ad ABF′E′, e il paralellogrammo GFBC, che è uguale ad ADHE, è eguale ancora ad ADH′E′. Dunque i tre piani, che forman l'angolo solido G nel prisma GHFBCD, son respettivamente uguali ai tre piani, che forman l'angolo solido A nel prisma ABDH′E′F′: d'altronde son disposti similmente; dunque questi due prismi sono uguali, * e potrebbero esser soprapposti. Ma uno di essi ABDH′E′F′ è simmetrico col prisma ABDHEF; dunque l'altro GHFBCD è pure simmetrico con ABDHEF.

* 2.

* 3.

PROPOSIZIONE VII.

LEMMA

In qualunque prisma ABCI *le sezioni* NOPQR, STUXY, *fatte da dei piani paralelli, son poligoni eguali.* Fig. 201.

Poichè i lati NO, ST son paralelli, essendo le intersezioni di due piani paralelli con

un terzo piano ABGF, e questi medesimi lati NO, ST son compresi tra le paralelle NS, OT, che son lati del prisma; dunque NO è uguale a ST. Per una simil ragione, i lati OP, PQ, QR, ec. della sezione NOPQR son respettivamente eguali ai lati TV, VX, XY, ec. della sezione STVXY. D'altronde i lati eguali sono nel medesimo tempo paralelli; dal che ne segue che gli angoli NOP, OPQ, ec. della prima sezione son respettivamente eguali agli angoli STV, TVX, ec. della seconda. Dunque le due sezioni NOPQR, STVXY son poligoni eguali.

Corollario. Ogni sezione, fatta in un prisma paralellamente alla sua base, è eguale alla detta base.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA

Fig. 208. *I due prismi triangolari simmetrici* ABDHEF, BCDFGH, *nei quali si decompone il paralellepipedo* AG, *sono equivalenti tra loro.*

Per i vertici B, e F conducete perpendicolarmente al lato BF i piani B*adc*, F*ehg*, che incontreranno da una parte in *a*, *d*, *c*, dall'altra in *e*, *h*, *g* i tre altri AE, DH, CG dello stesso paralellepipedo; le sezioni B*adc*, F*ehg* saranno paralellogrammi eguali. Queste sezioni sono eguali perchè son fatte da piani perpendicolari ad una medesima retta, e per conseguenza paralelli *; son paralellogrammi perchè due lati opposti d'una medesima sezione *a*B, *dc* son le in-

* 7.

tersezioni de' due piani paralelli ABFE, DCGH fatte da un medesimo piano.

Per una simil ragione, la figura B*ae*F è un paralellogrammo, come pure le altre faccie laterali BF*gc*, *cdhg*, ec. del solido B*adcfehg*: dunque questo solido è un prisma *, e questo prisma è retto, poichè il lato BF è perpendicolare al pian della base. * Def. 4.

Ciò posto, se per il piano BFHD si divida il prisma retto B*h* in due prismi triangolari retti *a*B*de*F*h*, B*dc*F*hg*, dico che il prisma triangolare obliquo ABDEFH sarà equivalente al prisma triangolare retto *a*B*de*F*h*.

Infatti questi due prismi avendo una parte comune ABD*he*F, basterà provare che le parti rimanenti, cioè i solidi B*a*AD*d*, F*e*EH*h*, sono equivalenti tra loro.

Ora, a causa dei paralellogrammi ABFE, *a*BF*e*, i lati AE, *ae*, eguali al lor paralello BF, sono eguali tra loro; così togliendone la parte comune A*e*, resterà A*a*=E*e*. Proverebbesi parimente che D*d*=H*h*.

Adesso, per operar la soprapposizione dei due solidi B*a*AD*d*, F*e*EH*h*, ponghiamo la base F*eh* sopra la sua eguale B*ad*; allora il punto *e* cadendo in *a*, ed il punto *h* in *d*, i lati *e*E, *h*H cadranno sopra i loro eguali *a*A, *d*D, poichè essi son perpendicolari al medesimo piano B*ad*. Dunque i due solidi, di cui si tratta, coincideranno interamente l'uno con l'altro; dunque il prisma obliquo BADFEH è equivalente al prisma retto B*ad*F*eh*.

Si dimostrerà similmente che il prisma obliquo BDCFHG è equivalente al prisma retto B*dc*F*hg*. Ma i due prismi retti B*ad*F*eh*, B*dc*F*hg* son eguali tra loro, poichè hanno la medesima altezza BF, e le loro basi B*ad*, B*dc* son metà d'un medesimo paralellogrammo *. Dunque i due prismi triangolari BADFEH, BDCFHG equivalenti a dei prismi eguali sono equivalenti tra loro.

* 2, 3. Cor. 1.

Coroll.° Ogni prisma triangolare ABDHEF è la metà del paralellepipedo AG costrutto sul medesimo angolo solido A con le medesime costole, o spigoli AB, AD, AE.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA

Fig. 209. *Se due paralellepipedi* AG, AL *hanno la base comune* ABCD, *e se le lor basi superiori* EFGH, IKLM *sono comprese in un medesimo piano, e tra le medesime paralelle* EK, HL, *questi due paralellepipedi saranno equivalenti fra loro.*

Possono aceadere tre casi, secondo che EI è maggiore, minore, o eguale a EF; ma la dimostrazione è la stessa per tutti. E in primo luogo dico che il prisma triangolare AEIDHM è uguale al prisma triangolare BFKCGL.

Infatti, poichè AE è paralella a BF, e HEaGF, l'angolo AEI=BFK, HEI=GFK, e HEA=GFB. Di questi sei angoli i primi tre formano l'angolo solido E, gli altri tre

formano l'angolo solido F; dunque, poichè gli angoli piani son respettivamente eguali, e similmente disposti, ne segue che gli angoli solidi E, ed F sono eguali. Adesso, se si pone il prisma AEM sul prisma BFL, e prima la base AEI sulla base BIK, queste due basi essendo uguali coincideranno; e, poichè l'angolo solido E è uguale all' angolo solido F, il lato EH cadrà sul suo uguale FG. Non bisogna altro di più per provare che i due prismi coincideranno in tutta la loro estensione; perchè la base AEI, e la costola EH determinano il prisma AEM, come la base BFK, e la costola FG determinano il prisma BFL *. Dunque questi due prismi son uguali. * 8.

Ma, se dal solido AL si toglie il prisma AEM, resterà il paralellepipedo AIL; e, se dallo stesso solido AL si toglie il prisma BFL, resterà il paralellepipedo AEG. Dunque i due paralellepipedi AIL, AEG sono equivalenti fra loro.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA

Due paralellepipedi della medesima base, e della medesima altezza sono equivalenti fra loro.

Sia ABCD la base comune ai due paralellepipedi AG, AL; poichè hanno la medesima altezza, le loro basi superiori EFGH, IKLM saranno nel medesimo piano. Di più i lati EF, ed AB sono uguali, e paralelli, Fig. 210.

come pure IK, ed AB; dunque EF è uguale, e paralella ad IK: per una simil ragione GF è uguale, e paralella a LK. Siano prolungati i lati EF, HG, ed ancora LK, IM, finchè gli uni, e gli altri formino colle loro intersezioni il paralellogrammo NOPQ; è chiaro che questo paralellogrammo sarà uguale a ciascuna delle basi EFGH, IKLM. Ora, se s'immagina un terzo paralellepipedo, che colla medesima base inferiore ABCD abbia per base superiore NOPQ, questo terzo paralellepipedo sarebbe equivalente al paralellepipedo AG *, poichè, avendo la stessa base inferiore, le basi superiori son situate in un medesimo piano, e fra le paralelle GQ, FN. Per la medesima ragione, questo terzo paralellepipedo sarebbe equivalente al paralellepipedo AL. Dunque i due paralellepipedi AG, AL, che hanno la medesima base, e la medesima altezza, sono equivalenti fra loro.

* 7.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA

Ogni paralellepipedo può esser cangiato in un paralellepipedo rettangolo equivalente, che avrà la medesima altezza, e una base equivalente.

Fig. 210. Sia AG il paralellepipedo proposto: dai punti A, B, C, D conducete AI, BK, CL, DM perpendicolari al pian della base; formerete così il paralellepipedo AL equivalente al paralellepipedo AG, le di cui faccie

laterali AK, BL, ec. saranno rettangoli. Se dunque la base ABCD è un rettangolo, AL sarà il paralellepipedo rettangolo equivalente al paralellepipedo proposto AG. Ma, se ABCD non è un rettangolo, conducete AO, e BN perpendicolari sopra CD, dipoi OQ, e NP perpendicolari sopra la base; avrete il solido ABNOIKPQ, che sarà un paralellepipedo rettangolo. Infatti, per costruzione, la base ABON, e la sua opposta IKPQ sono rettangoli; le faccie laterali sono pur tali, poichè le costole AI, OQ, ec. son perpendicolari al pian della base: dunque il solido AP è un paralellepipedo rettangolo. Ma i due paralellepipedi AP, AL possono considerarsi come costrutti sulla medesima base ABKI, e colla medesima altezza AO; dunque sono equivalenti: dunque il paralellepipedo AG, ch' era stato prima cangiato in un paralellepipedo equivalente AL, si trova di nuovo cangiato in un paralellepipedo rettangolo equivalente AP, che ha la medesima altezza AI, e la di cui base ABNO è equivalente alla base ABCD.

Fig. 211.

Fig. 210. e 211.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA

Due paralellepipedi rettangoli AG, AL, *che hanno la medesima base* ABCD, *stanno fra loro come le loro altezze* AE, AI.

Fig. 212.

Supponiamo primieramente che le altezze AE, AI stiano fra loro come dei numeri interi, per esempio, come 15 stà a 8. Si divi-

derà AE in 15 parti uguali, di cui AI ne conterrà 8; e per i punti di divisione x, y, z, ec. si condurranno dei piani paralelli alla base. Questi piani divideranno il solido AG in 15 paralellepipedi parziali, che saranno tutti uguali fra loro, perchè avranno basi uguali, ed altezze uguali; basi uguali perchè ogni sezione, come MIKL, fatta in un prisma paralellamente alla sua base ABCD, è eguale a questa base *; altezze uguali perchè queste altezze sono le divisioni stesse Ax, xy, yz, ec. Ora di questi 15 paralellepipedi 8 son contenuti in AL; dunque il solido AG stà al solido AL come 15 stà a 8, o in generale come l'altezza AE stà all'altezza AI.

* 7.

In secondo luogo, se il rapporto d'AE ad AI non può esprimersi in numeri, dico che sarà ugualmente *solid.* AG : *solid.* AL :: AE : AI. Poichè, se que ta proporzion non ha luogo, supponiamo che si abbia *sol.* AG : *sol.* AL :: AE : AO. Dividete AE in parti uguali, di cui ciascuna sia minore di OI; vi sarà almeno un punto di divisione m fra O, ed I. Sia P il paralellepidedo, che ha per base ABCD, e per altezza Am; poichè le altezze AE, Am stanno fra loro come due numeri interi, si avrà *sol.* AG : P :: AE : Am. Ma si ha, per ipotesi, *sol.* AG : *sol.* AL :: AE : AO; da ciò resulta *sol.* AL : P :: AO : Am. Ma AO è maggiore di Am; dunque bisognerebbe, perchè la proporzione avesse luogo, che il solido AL fosse mag-

giore di P; ora al contrario è minore: dunque è impossibile che il quarto termine della proporzione *sol.* AG : *sol.* AI :: AE : X sia una linea AO maggiore di AI. Con un ragionamento simile si dimostrerebbe che il quarto termine non può esser minore di AI; dunque è uguale ad AI. Dunque i paralellepipedi rettangoli della medesima base stanno fra loro come le loro altezze.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA

Due paralellepipedi rettangoli AG, AK, *che hanno la medesima altezza* AE, *stanno fra loro come le basi* ABCD, AMNO. Fig. 213.

Avendo situato i due solidi uno accanto dell'altro, come la figura gli rappresenta, prolungate il piano ONKL finchè incontri il piano DCGH in PQ; avrete un terzo paralellepipedo AQ, che si potrà paragonare a ciascuno dei paralellepipedi AG, AK. I due solidi AG, AQ, avendo la medesima base AEHD, stanno fra loro come le respettive altezze AB, AO; parimente i due solidi AQ, AK, avendo la medesima base AOLE, stanno fra loro come le loro altezze AD, AM. Perciò si avranno le due proporzioni

sol. AG : *sol.* AQ :: AB : AO,
sol. AQ : *sol.* AK :: AD : AM.

Moltiplicando per ordine queste due proporzioni, ed omettendo nel resultato il moltiplicatore comune *sol.* AQ, si avrà
sol. AG : *sol.* AK :: AB×AD : AO×AM.

Ma AB×AD rappresenta la base ABCD, e AO×AM rappresenta la base AMNO; dunque due paralellepipedi rettangoli della medesima altezza stanno fra loro come le basi.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA

Due paralellepipedi rettangoli qualunque stanno fra loro come i prodotti delle lor basi per le loro altezze, o come i prodotti delle loro tre dimensioni.

Fig. 213. Poichè, avendo situato i due solidi AG, AZ in maniera che le lor superficie abbiano un angolo comune BAE, prolungate i piani necessarj per formare il terzo paralellepipedo AK della medesima altezza col paralellepipedo AG. Si avrà, per la proposizion precedente,

sol. AG : *sol.* AK :: ABCD : AMNO.

Ma i due paralellepipedi AK, AZ, che hanno la medesima base AMNO, stanno fra loro come le loro altezze AE, AX, onde si ha

sol. AK : *sol.* AZ :: AE : AX.

Moltiplicando per ordine queste due proporzioni, ed omettendo nel resultato il moltiplicatore comune *sol* AK, si avrà

sol. AG : *sol.* AZ :: ABCD×AE : AMNO×AX.

In vece di ABCD, ed AMNO si può mettere AB×AD, ed AO×AM, il che darà

sol. AG : *sol.* AZ :: AB×AD×AE : AO×AM×AX.

Dunque due paralellepipedi rettangoli qualunque stanno fra loro ec.

Scolio. Da ciò segue che si può prendere per misura d'un paralellepipedo rettangolo il prodotto della sua base per la sua altezza, o il prodotto delle sue tre dimensioni. Su questo principio valuteremo tutti gli altri solidi.

Per l'intelligenza di questa misura bisogna rammentarsi che s'intende per prodotto di due, o di più linee il prodotto dei numeri, che rappresentano tali linee; e questi numeri dipendono dall'unità lineare, che si può prendere a piacimento. Posto ciò, il prodotto delle tre dimensioni d'un paralellepipedo è un numero, che non significa niente in se stesso, e che sarebbe differente se si fosse presa un'altra unità lineare. Ma, se si moltiplicano parimente le tre dimensioni d'un altro paralellepipedo, valutandole sulla medesima unità lineare, i due prodotti staran fra di loro come i solidi, e daranno l'idea della loro grandezza relativa.

La grandezza d'un solido, il suo volume, o la sua estensione costituiscono ciò, che si chiama la sua *solidità;* e la parola *solidità* è impiegata particolarmente per indicare la misura d'un solido. Così si dice che la solidità d'un paralellepipedo rettangolo è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza, o al prodotto delle sue tre dimensioni.

Essendo le tre dimensioni del cubo uguali fra loro, se il lato è 1, la solidità sarà $1\times1\times1$, ossia 1; se il lato è 2, la solidità sarà $2\times2\times2$, ovvero 8; se il lato è 3, la solidità sarà

$3 \times 3 \times 3$, ossia 27, e così in seguito: perciò, essendo i lati dei cubi come i numeri 1, 2, 3, ec., i cubi stessi, o le loro solidità stanno come i numeri 1, 8, 27, ec. Quindi è che in Aritmetica si chiama *cubo* d'un numero il prodotto, che risulta da tre fattori uguali a questo numero.

Se si proponesse di fare un cubo doppio d'un cubo dato, bisognerebbe che il lato del cubo cercato fosse al lato del cubo dato come la radice cuba di 2 è all'unità. Ora si trova facilmente con una costruzione geometrica la radice quadrata di 2, ma non si può trovare ugualmente la sua radice cubica, almeno colle operazioni della Geometria elementare, le quali consistono in impiegar solamente linee rette, di cui si conoscan due punti, e circoli, di cui siano determinati i centri, ed i raggi.

Per motivo di questa difficoltà il problema della *duplicazione del cubo* è stato celebre fra gli antichi Geometri, come quello della *trisezione dell'angolo*, che è presso a poco del medesim' ordine. Ma si conoscono fin da gran tempo le soluzioni, delle quali queste specie di problemi son suscettibili; e benchè meno semplici delle costruzioni della Geometria elementare, non son per altro meno esatte, nè men rigorose.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA

La solidità d'un paralellepipedo, ed in generale la solidità d'un prisma qualunque è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Poichè 1.° un paralellepipedo qualunque è equivalente a un paralellepipedo rettangolo della medesima altezza, e di base equivalente *. Ora la solidità di questo è uguale * 11. alla sua base moltiplicata per la sua altezza; dunque la solidità del primo è parimente uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

2.° Ogni prisma triangolare è la metà d'un paralellepipedo della medesima altezza, e di base doppia *. Ora la solidità di questo è * 8. uguale alla sua base moltiplicata per la sua altezza; dunque quella del prisma triangolare è uguale al prodotto della sua base, metà di quella del paralellepipedo, moltiplicata per la sua altezza.

3.° Un prisma qualunque può esser diviso in tanti prismi triangolari della medesima altezza quanti triangoli si posson formare nel poligono, che gli serve di base. Ma la solidità d'ogni prisma triangolare è uguale alla sua base moltiplicata per la sua altezza; e, poichè l'altezza è la medesima per tutti, ne segue che la somma di tutti i prismi parziali sarà uguale alla somma dell'aree di tutti i triangoli, che servon loro di basi, mol-

tiplicata per l'altezza comune. Dunque la solidità d'un prisma poligono qualunque è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Corollario. Se si paragonan due prismi, che abbiano la medesima altezza, i prodotti delle basi per le altezze staranno come le basi. Dunque *due prismi della medesima altezza stanno fra loro come le loro basi;* per una simil ragione, *due prismi della medesima base stanno fra loro come le loro altezze*.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

Fig 214. *Se una piramide* SABCDE *è tagliata da un piano* abd *paralello alla base*,

1.° *I lati* SA, SB, SC, *ec., e l'altezza* SO *saranno tagliati proporzionalmente* in a, b, c, *ec., ed* o;

2.° *La sezione* abcde *sarà un poligono simile alla base* ABCDE.

Poichè 1.° essendo paralelli i piani ABD, *abd*, le loro intersezioni AB, *ab* con un terzo piano SAB saranno altresì paralelle *; dunque i triangoli SAB, *sab* son simili, e si ha la proporzione SA : S*a* :: SB : S*b*; si avrebbe pure SB : S*b* :: SC : S*c*; e così in seguito. Dunque tutti i lati SA, SB, SC, ec. sono tagliati proporzionalmente in *a*, *b*, *c*, ec. L'altezza SO è tagliata nella proporzione medesima al punto o, perchè BO, e *bo* son paralelle, e però si ha SO : S*o* :: SB : S*b*.

* 10, 5.

2.° Perchè *ab* è paralella ad AB, *bc* a BC, *cd* a CD, ec., l'angolo *abc*=ABC, l'angolo *bcd*=BCD, e così in seguito. Di più, a cagione dei triangoli simili SAB, S*ab*, si ha AB : *ab* :: SB : S*b*; ed, a cagione dei triangoli simili SBC, S*bc*, si ha SB : S*b* :: BC : *bc*; dunque AB : *ab* :: BC : *bc*: si avrebbe pure BC : *bc* :: CD : *cd*, e così in seguito. Dunque i poligoni *abcde*, ABCDE hanno gli angoli uguali, e i lati omologhi proporzionali; dunque son simili.

Corollario. Siano SABCDE, SXYZ due piramidi, il cui vertice è comune, e le cui basi sono sopra un medesimo piano, talmente che hanno la medesima altezza: se si tagliano con un piano paralello al pian delle basi, sia *abcde* la sezione fatta in una piramide, *xyz* la sezione fatta nell'altra; dico che *le sezioni abcde, xyz staranno fra loro come le basi* ABCDE, XYZ.

Poichè, essendo simili i poligoni ABCDE, *abcde*, le loro superficie stanno come i quadrati dei lati omologhi AB, *ab*; ma AB : *ab* :: SA : S*a*; dunque ABCDE : *abcde* :: $\overline{SA}^2$: $\overline{Sa}^2$. Per la medesima ragione, XYZ : *xyz* :: $\overline{SX}^2$: $\overline{Sx}^2$. Ma, poichè *abcxyz* è un solo piano, si ha pure SA : S*a* :: SX : S*x*; dunque ABCDE : *abcde* :: XYZ : *xyz*. Dunque le sezioni *abcde*, *xyz* stanno fra loro come le basi ABCDE, XYZ.

PROPOSIZIONE XVII.

LEMMA

Fig 215. *Sia* SABC *una piramide triangolare, di cui* S *è il vertice, ed* ABC *la base; se si dividono i lati* SA, SB, SC, AB, AC, BC *in due parti eguali nei punti* D, E, F, G, H, I, *e che per questi punti si tirin le linee rette* DE, EF, DF, EG, FH, EI, GH; *dico che si potrà considerar la piramide* SABC *come composta di due prismi* AGHFDE, EGICFH *equivalenti tra loro, e di due piramidi eguali* SDEF, EGBI.

In conseguenza della costruzione ED è paralella a BA, e GE ad AS; dunque la figura ADEG è un paralellogrammo. La figura ADFH lo è pure per la stessa ragione; dunque le tre rette AB, GE, HF sono eguali, e paralelle; dunque il solido AGHFDE è
* 14, 5. un prisma *.

Si proverà similmente che le due figure EFCI, CIGH son paralellogrammi, e le tre rette EF, CI, GH son pur paralelle, ed eguali; dunque il solido EGICFH è parimente un prisma. Dico adesso che questi due prismi triangolari sono equivalenti fra loro.

In effetto, se sopra le costole GI, GE, GH si forma il paralellepipedo GX, il prisma triangolare GEICFH sarà la metà di que-
* 6. sto paralellepipedo *; d'altronde il prisma AGHFDE è eguale pure alla metà del pa-
* 12. ralellepipedo GX *, perchè hanno la mede-

sima altezza, e perchè il triangolo AGH, base del prisma, è metà del paralellogrammo GICH *, base del paralellepipedo. Dunque i due prismi EGICFH, AGHFDE sono equivalenti fra loro. * 2, 3.

Questi due prismi essendo tolti dalla piramide SABC, non restano che le due piramidi SDEF, EGBI: dico adesso che queste due piramidi sono eguali tra loro.

Infatti, a motivo dei lati eguali, cioè, BE=SE, BG=AG=DE, EG=AD=SD, il triangolo BEG è eguale al triangolo ESD. Per una simil ragione, il triangolo BEI è eguale al triangolo SEF; d'altronde l'inclinazione scambievole dei due piani BEG, BEI è la medesima di quella dei due piani ESD, SEF, poichè BEG non fa che un sol piano con ESD, come pure BEI con SEF. Dunque, se per eseguir la soprapposizione delle due piramidi SDEF, EGBI si pone il triangolo EBG sopra il suo eguale SDE, bisognerà che il piano BEI cada sopra il piano SEF; e, poichè i triangoli EBI, SEF sono eguali, e similmente posti, il punto I cadrà in F, e le due piramidi SDEF, EGBI coincideranno perfettamente.

Dunque la piramide intera SABC è composta di due prismi triangolari AGF, GIF equivalenti fra loro, e di due piramidi eguali SDEF, EGBI.

Corollario I. Dal vertice S sia abbassata SO perpendicolare sopra il piano ABC; e sia P il punto ove questa perpendicolare incon-

tra il piano DEF paralello ad ABC. Poichè
* 16. SD=½SA, si avrà SP=½SO *, ed il triangolo DEF=¼ABC: dunque la solidità del prisma AGHFDE=¼ABC×½SO, e quella dei due prismi riuniti AGHFDE, EGICFH =¼ABC×SO. Questi due prismi sono minori della piramide SABC, poichè vi son contenuti; dunque *la solidità d'una piramide triangolare è più grande che il quarto del prodotto della sua base per la sua altezza*.

Corollario II. Se si conducono le rette DG, DH, si avrà una nuova piramide ADGH, che sarà eguale alla piramide SDEF; perchè si può porre la base DEF sopra la sua eguale AGH; ed allora gli angoli SDE, SDF, essendo eguali agli angoli DAG, DAH è visi-
* 25, 5. Scol. bile che DS cadrà sopra AD *, ed il vertice S sopra il vertice D. Ora la piramide ADGH è minore del prisma AGHDEF, poichè v'è contenuta; dunque ciascuna delle piramidi SDEF, EGBI è minore del prisma AGHDEF; dunque la piramide SABC, che è composta di due piramidi, e di due prismi, è minore di quattro di questi medesimi prismi. Ora la solidità d'uno di questi prismi =⅓ABC×SO, ed il suo quadruplo è eguale a ½ABC×SO; dunque *la solidità d'una piramide triangolare qualunque è minore della metà del prodotto della sua base per la sua altezza*,

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA

La solidità d'una piramide triangolare è eguale al terzo del prodotto della sua base per la sua altezza.

Sia SABC una piramide triangolare qualunque, ABC la sua base, SO la sua altezza; dico che la solidità della piramide SABC sarà eguale al terzo del prodotto dell'area ABC per l'altezza SO, in modo che si avrà SABC=$\frac{1}{3}$ABC×SO, ovvero SO×$\frac{1}{3}$ABC. Fig. 215.

Perchè, se si nega questa proposizione, bisognerà che la solidità SABC sia eguale al prodotto di SO per una quantità più grande, o più piccola che $\frac{1}{3}$ABC.

Sia 1.° questa quantità più grande, di modo che si abbia SABC=SO ($\frac{1}{3}$ABC+M). Se si fa la stessa costruzione che nella proposizion precedente, la piramide SABC sarà divisa in due prismi equivalenti tra loro AGHFDE, EGICFH, ed in due piramidi eguali SDEF, EGBI. Ora la solidità del prisma AGHFDE è DEF×PO, e quella dei due prismi insieme è per conseguenza DFE×2PO, ovvero DFE×SO. Togliendo i due prismi dalla piramide intera, il resto sarà eguale al doppio della piramide SDEF, in modo che si avrà 2SDEF=SO× ($\frac{1}{3}$ABC+M—DFE). Ma, perchè SA è doppia di SD, la superficie ABC è quadruple di DFE *, e così $\frac{1}{3}$ABC—DFE=$\frac{4}{3}$DFE—DFE=$\frac{1}{3}$DFE; dunque 2SDEF=SO× ($\frac{1}{3}$DEF+M). E così * 16.

prendendo la metà da una parte, e dall'altra, si avrà SDEF=SP($\frac{1}{3}$DEF+M). Dal che si fa manifesto che, per avere la solidità della piramide SDEF, bisognerà aggiungere al terzo della sua base la medesima superficie M, ch' è stata aggiunta al terzo della base della gran piramide, e moltiplicare il tutto per l'altezza SP della piccola piramide.

Se si divide SD in due parti eguali nel punto K, e che per il punto K si faccia passare il piano KLM paralello a DEF, il quale incontri in Q la perpendicolare SP, la medesima dimostrazione prova egualmente che la solidità della piramide SKLM sarà eguale a SQ×($\frac{1}{3}$KLM+M).

Continuando così a formare una serie di piramidi, i cui lati decrescano in ragion suddupla, e le basi in ragion suqquadrupla, si arriverà ben presto ad una piramide S*abc*, la di cui base *abc* sarà più piccola di 6M. Sia S*o* l'altezza di quest'ultima piramide, e la sua solidità, dedotta da quelle delle piramidi precedenti, sarà S*o*× ($\frac{1}{3}$*abc*+M). Ma si ha M>$\frac{1}{3}$*abc*, e per conseguenza $\frac{1}{3}$*abc*+M>$\frac{1}{2}$*abc*; bisognerebbe dunque che la solidità della piramide S*abc* fosse maggiore di S*o*×$\frac{1}{2}$*abc*; resultato assurdo, poichè si è provato nel corollario II. della proposizion precedente, che la solidità d'una piramide triangolare è sempre minore della metà del prodotto della sua base per la sua altezza. 1.° È dunque impossibile che la solidità della pi-

ramide SABC sia maggiore di SO$\times\frac{1}{3}$ABC.

Sia 2.° SABC=SO$\times$($\frac{1}{3}$ABC—M); si proverà, come nel primo caso, che la solidità della piramide SDEF, le cui dimensioni son due volte minori, è eguale a SP$\times$($\frac{1}{3}$DEF—M); e continuando la serie delle piramidi, i di cui lati decrescono in ragion suddupla, fino ad un termin qualunque *Sabc*, si avrà parimente la solidità dell' ultima piramide *Sabc*= *So*$\times$($\frac{1}{3}$*abc*—M). Ma le basi ABC, DEF, LKM . . ., *abc* formando una serie decrescente, di cui ciascun termine è il quarto del precedente, si arriverà ben presto ad un termine *abc* eguale a 12M, o che sarà compreso tra 12M, e 3M; allora M essendo eguale, o maggiore di $\frac{1}{12}$*abc*, la quantità $\frac{1}{3}$*abc*—M sarà eguale a $\frac{1}{4}$*abc*, o più piccola che $\frac{1}{4}$*abc*, in modo che la solidità della piramide *Sabc* sarà o =*So*$\times\frac{1}{4}$*abc*, o <*So*$\times\frac{1}{4}$*abc*; resultato parimente assurdo, poichè, secondo il corollario I. della proposizion precedente, la solidità d' una piramide triangolare è sempre maggiore del quarto del prodotto della sua base per la sua altezza. Dunque 2.° la solidità della piramide SABC non può esser minore di SO$\times\frac{1}{3}$ABC.

Dunque finalmente la solidità della piramide SABC=SO$\times\frac{1}{3}$ABC, ovvero =$\frac{1}{3}$ABC$\times$SO, conformemente all' enunciato del teorema.

Corollario I. Ogni piramide triangolare è la terza parte del prisma triangolare della medesima base, e della medesima altezza;

perchè ABC×SO è la solidità del prisma, di cui ABC è la base, e SO l'altezza.

Corollario II. Due piramidi triangolari della medesima altezza stanno tra loro come le basi, e due piramidi triangolari della medesima base stanno tra loro come le altezze.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA

Fig. 214. *Ogni piramide* SABCDE *ha per misura la terza parte de prodotto della sua base* ABCDE *per la sua altezza* SO.

Poichè, facendo passare i piani SEB, SEC per le diagonali EB, EC, si dividerà la piramide poligona SABCDE in più piramidi triangolari, che avranno tutte la medesima altezza SO. Ma, per il teorema precedente, ciascuna di queste piramidi si misura moltiplicando ognuna delle basi ABE, BCE, CDE per la terza parte dell'altezza SO; dunque la somma delle piramidi triangolari, o la piramide poligona SABCDE, avrà per misura la somma dei triangoli ABE, BCE, CDE, o il poligono ABCDE moltiplicato per $\frac{1}{3}$SO. Dunque ogni piramide ha per misura la terza parte del prodotto della sua base per la sua altezza.

Corollario I. Ogni piramide è dunque la terza parte del prisma della medesima base, e della medesima altezza.

Corollario II. Due piramidi della medesima altezza stanno fra loro come le loro basi, e due piramidi della medesima base stanno fra loro come le loro altezze.

Scolio. Si può valutare la solidità d'ogni corpo poliedro decomponendolo in piramidi; e questa decomposizione si può fare in più maniere. Una delle più semplici è di far partire i piani di divisione dal vertice d'un istess' angolo solido; allora si avranno tante piramidi parziali quante facce sono nel poliedro, eccetto quelle, che formau l' angolo solido, donde partono i piani di divisione.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA

Due poliedri simmetrici sono equivalenti tra loro, ovvero eguali in solidità.

Poichè 1.° due piramidi triangolari simmetriche, come SABC, TABC, hanno per misura comune il prodotto della base ABC per il terzo dell' altezza SO, ovvero TO; dunque queste piramidi sono equivalenti tra loro. Fig. 202.

2.° Se si divide in una maniera qualunque uno deì poliedri simmetrici in piramidi triangolari, si potrà dividere parimente l' altro poliedro in piramidi triangolari simmetriche: ora le piramidi triangolari simmetriche son respettivamente equivalenti; dunque i poliedri interi saranno tra loro equivalenti, od eguali in solidità.

Scolio. Questa medesima proposizione sembrava resultare immediatamente dalla proposizione II., ove si è fatto vedere che in due poliedri simmetrici tutte le parti costituenti d' un solido sono eguali alle parti costituenti dell' altro.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA

Se una piramide è tagliata da un piano paralello alla sua base, il tronco, che resta togliendo la piccola piramide, è uguale alla somma di tre piramidi, che avessero per altezza comune l'altezza del tronco, e le cui basi fossero la base inferiore del tronco, la sua base superiore, ed una media proporzionale fra queste due basi.

Fig. 217. Sia SABCDE una piramide tagliata dal piano *abd* paralello alla base; sia TEGH una piramide triangolare, la di cui base, ed altezza siano uguali, od equivalenti a quelle della piramide SABCDE. Si possono suppor le due basi situate sopra un medesimo piano; ed allora il piano *abd* prolungato determinerà nella piramide triangolare una sezione *fgh* situata alla medesima altezza sopra il piano comun delle basi; dal che resulta che la sezione *fgh* stà alla sezione *abd* come la base
* 16. FGH stà alla base ABD *; e, poichè le basi sono equivalenti, le sezioni lo saran pure. Da ciò segue che le piramidi *Sabcde*, T*fgh* sono equivalenti, giacchè hanno la medesima altezza, e basi equivalenti. Le piramidi intere SABCDE, TFGH sono equivalenti per la medesima ragione; dunque i tronchi ABD*dab*, FGH*hfg* son equivalenti, e per conseguenza basterà dimostrare la proposizione enunziata per il solo caso del tronco di piramide triangolare.

Sia dunque FGH*hfg* un tronco di piramide triangolare a basi paralelle: per i tre punti F, *g*, H conducete il piano F*g*H, che taglierà dal tronco la piramide triangolare *g*FGH: questa piramide ha per base la base inferiore FGH del tronco; ha pure per altezza l'altezza del tronco, poichè il vertice *g* è nel piano della base superiore *fgh*. Fig. 218.

Dopo aver tolto questa piramide resterà la piramide quadrangolare *gfh*HF, il cui vertice è *g*, e la base *fh*HF. Per i tre punti *f*, *g*, H conducete il piano *fg*H, che dividerà la piramide quadrangolare in due piramidi triangolari *g*F*f*H, *gfh*H. Quest'ultima ha per base la base superiore *gfh* del tronco, e per altezza l'altezza del tronco, poichè il suo vertice H appartiene alla base inferiore. Quindi abbiamo già due delle tre piramidi, che debbon comporre il tronco.

Resta a considerare la terza *g*F*f*H: ora, se si conduce *g*K paralella a *f*F, e se s'immagina una nuova piramide *f*FHK, il cui vertice è K, e la base F*f*H, queste due piramidi avranno la medesima base F*f*H; avranno pure la medesima altezza, poichè i vertici *g*, e K son situati sopra una linea *g*K paralella a F*f*, e per conseguenza paralella al pian della base; dunque queste piramidi sono equivalenti: ma la piramide *f*FKH può considerarsi come se avesse il suo vertice in *f*, e così ella avrà la medesima altezza del tronco. Quanto alla sua base FKH, dico ch'è media proporzionale fra le basi FGH,

fgh. Infatti i triangoli FHK, *fgh* hanno un angolo uguale E=*f*, ed un lato uguale FK=
* 24, 3. *fg*; si ha dunque * FHK : *fgh* :: FH : *fh*. Si ha pure FHG : FHK :: FG : FK, o *fg*. Ma i triangoli simili FGH, *fgh* danno FG : *fg* :: FH : *fh*; dunque FGH : FHK :: FHK : *fgh*, cioè, la base FHK è media proporzionale fra le due FGH, *fgh*. Dunque un tronco di piramide triangolare a basi paralelle equivale a tre piramidi, che hanno per altezza comune l'altezza del tronco, e le cui basi sono la base inferiore del tronco, la sua base superiore, ed una media proporzionale fra queste due basi.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA

Fig. 216. *Se si taglia un prisma triangolare, di cui* ABC *è la base, con un piano* DEF *inclinato a questa base, il solido* ABCDEF, *che resulta da questa sezione, sarà eguale alla somma di tre piramidi, i vertici delle quali sono* D, E, F, *e la base comune* ABC.

Per i tre punti F, A, C fate passare il piano FAC, che toglierà dal prisma troncato ABCDEF la piramide triangolare FABC: questa piramide ha per base ABC, e per vertice il punto F.

Dopo aver tolto questa piramide, resterà la piramide quadrangolare FACDE, di cui F è il vertice, ed ACDE la base. Per i tre punti F, E, C conducete un piano FEC, che dividerà la piramide quadrangolare in due piramidi triangolari FACE, FCDE.

La piramide FAEC, che ha per base il triangolo AEC, e per vertice il punto F, è equivalente ad una piramide EABC, che avesse per base AEC, e per vertice il punto B. Perchè queste due piramidi hanno la medesima base, ed hanno ancora la medesima altezza, poichè la linea BF essendo paralella a ciascuna delle linee AE, CD, è paralella perciò al loro piano ACE; dunque la piramide FAEC è equivalente alla piramide EABC, la quale può esser considerata come se avesse per base ABC, e per vertice il punto E.

La terza piramide FCDE può esser cangiata primieramente in AFCD, perchè queste due piramidi hanno la medesima base FCD, ed hanno ancora la medesima altezza, essendo AE paralella al piano FCD; dunque la piramide FCDE è equivalente ad AFCD. In seguito la piramide AFCD può esser cambiata in ABCD, perchè queste due piramidi hanno la base comune ACD, ed hanno ancora la medesima altezza, per essere i loro vertici F, e B situati sopra una paralella al pian della base. Dunque la piramide FCDE, equivalente ad AFCD, è ancora equivalente ad ABCD. Ora questa piramide può essere riguardata come se avesse per base ABC, e per vertice il punto D.

Dunque finalmente il prisma troncato ABCDEF è eguale alla somma di tre piramidi, che abbian per base comune ABC, e i di cui vertici sian respettivamente i punti D, E, F.

Corollario. Se le costole o spigoli AE, BF, CD sien perpendicolari al pian della base, dessi saranno nel medesimo tempo le altezze delle tre piramidi, che compongono insieme il prisma troncato; di modo che la solidità del prisma troncato sarà allora espressa per $\frac{1}{3}ABC \times AE + \frac{1}{3}ABC \times BF + \frac{1}{3}ABC \times CD$; quantità, che riducesi a $\frac{1}{3}ABC \times (AE+BF+CD)$.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA

Due piramidi triangolari simili hanno le facce omologhe simili, e gli angoli solidi omologhi uguali.

Fig. 203. Secondo la definizione le due piramidi triangolari SABC, TDEF son simili se i due triangoli SAB, ABC sono simili ai due TDE, DEF, e similmente posti, cioè, se si ha l'angolo ABS=DET, BAS=EDT, ABC=DEF, BAC=EDF, e se inoltre l'inclinazione dei piani SAB, ABC è uguale a quella dei piani TDE, DEF. Posto ciò, dico che queste piramidi hanno tutte le facce respettivamente simili, e gli angoli solidi omologhi uguali.

Prendete BG=ED, BH=EF, BI=ET, e tirate GH, GI, IH. La piramide TDEF è uguale alla piramide IGBH; poichè, avendo preso i lati GB, BH uguali ai lati DE, EF, e l'angolo GBH essendo per supposizione uguale all'angolo DEF, il triangolo GBH è uguale a DEF. Dunque, per effet-

tuare la soprapposizione delle due piramidi, si può primieramente situare la base DEF sulla sua uguale GBH; dipoi, giacchè il piano DTE è inclinato sopra DEF quanto il piano SAB sopra ABC, è chiaro che il piano DET cadrà indefinitamente sopra il piano BAS. Ma, per supposizione, l'angolo DET=GBI; dunque ET cadrà sulla sua uguale BI. E poichè i quattro angoli D, E, F, T coincidono con i quattro G, B, H, I, ne segue * che la piramide TDEF coincide colla piramide IGBH. * 1.

Ora, a cagione dei triangoli uguali DEF, GBH, si ha l'angolo BGH=EDF=BAC; dunque GH è paralella ad AC. Per una ragione simile GI è paralella ad AS; dunque il piano IGH è paralello a SAC *. Da ciò segue che il triangolo IGH, o il suo uguale TDF è simile a SAC *, ed il triangolo IBH, o il suo uguale TEF è simile a SBC; dunque le due piramidi triangolari simili SABC, TDEF hanno le quattro facce respettivamente simili: di più hanno gli angoli solidi omologhi uguali. * 13, 5. * 15.

Perchè si è già situato l'angolo solido E sul suo omologo B, e si potrebbe fare lo stesso per due altri angoli solidi omologhi; ma si vede immediatamente che due angoli solidi omologhi sono uguali, per esempio, gli angoli T, e S, perchè sono formati da tre angoli piani respettivamente uguali, e similmente posti.

Dunque due piramidi triangolari simili

hanno le facce omologhe simili, e gli angoli solidi omologhi uguali.

Corollario I. I triangoli simili nelle due piramidi danno le proporzioni AB : DE :: BC : EF :: AC : DF :: AS : DT :: SB : TE :: SC : TF; dunque *nelle piramidi triangolari simili i lati omologhi sono proporzionali.*

Corollario II. E poichè gli angoli solidi omologhi sono uguali, ne segue che *l'inclinazione di due facce qualunque d'una piramide è uguale all' inclinazione delle facce omologhe della piramide simile.*

Corollario III. Se si taglia la piramide triangolare SABC con un piano GIH parallello ad una delle facce SAC, la piramide parziale BGHI sarà simile alla piramide intera BASC. Poichè i triangoli BGI, BGH son respettivamente simili ai triangoli BAS, BAC, e similmente posti, l'inclinazione dei loro piani è la medesima negli uni, e negli altri; dunque le due piramidi sono simili.

Fig. 214. *Corollario IV.* In generale, *se si taglia una piramide qualunque* SABCDE *con un piano* abcde *paralello alla base, la piramide parziale* Sabcde *sarà simile alla piramide intera* SABCDE. Poichè le basi ABCDE, *abcde* son simili, e tirando AC, *ac* si è adesso provato che la piramide triangolare SABC è simile alla piramide *Sabc*; dunque il punto S è determinato per rapporto alla base ABC, come il punto S per rapporto alla base *abc* *; dunque le due piramidi SABCDE, *Sabcde* sono simili.

* Def. 18.

Scolio. In vece dei cinque dati richiesti dalla definizione perchè due piramidi triangolari sian simili si potrebbe sostituirne altri cinque secondo differenti combinazioni, e ne risulterebbero altrettanti teoremi, fra' quali si può distinguere questo: *Due piramidi triangolari son simili quand' hanno tutti i lati omologhi proporzionali*

Poichè, se si hanno le proporzioni AB : DE :: BC : EF :: AC : DF :: AS : DT :: SB : TE :: SC : TF, il che comprende cinque condizioni, i triangoli ABS, ABC saranno simili ai triangoli DET, DEF, e similmente posti. Si avra pure il triangolo SBC simile a TEF; dunque i tre angoli piani, che formano l'angolo solido B, saranno uguali respettivamente agli angoli piani, che forman l'angolo solido E; donde ne segue che l'inclinazione dei piani SAB, ABC è uguale a quella dei loro omologhi TDE, DEF, e che perciò le due piramidi saranno simili. Fig. 203.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA

Due poliedri simili hanno le facce omologhe simili, e gli angoli solidi omologhi uguali.

Sia ABCDE la base d'un poliedro; siano M, e N i vertici di due angoli solidi fuori di questa base, determinati dalle piramidi triangolari MABC, NABC, la cui base comune è ABC. siano nell'altro poliedro *abcde* la base omologa, o simile ad ABCDE; *m*, e *n* i vertici omologhi a M, e N, determi- Fig. 219.

nati dalle piramidi *mabc*, *nabc* simili alle piramidi MABC, NABC; dico primieramente che le distanze MN, *mn* sono proporzionali ai lati omologhi AB, *ab*.

Infatti, essendo simili le piramidi MABC, *mabc*, l'inclinazione dei piani MAC, BAC è uguale a quella dei piani *mac*, *bac*; parimente, essendo simili le piramidi NABC, *nabc*, l'inclinazione dei piani NAC, BAC è uguale a quella dei piani *nac*, *bac*. Dunque, se si tolgano le prime inclinazioni dall'ultime, resterà l'inclinazione dei piani NAC, MAC uguale a quella dei piani *nac*, *mac*. Ma, a motivo della similitudine delle stesse piramidi, il triangolo MAC è simile a *mac*, ed il triangolo NAC è simile a *nac*. Dunque le due piramidi triangolari MNAC, *mnac* hanno due facce respettivamente simili, similmente poste, ed ugualmente inclinate fra loro. Dunque queste piramidi sono simili *, e i loro lati omologhi danno la proporzione MN : *mn* :: AM : *am*. D'altronde AM : *am* :: AB : *ab*; dunque MN : *mn* :: AB : *ab*.

* 21.

Siano P, e *p* due altri vertici omologhi dei medesimi poliedri; si avrà similmente PN : *pn* :: AB : *ab*; PM : *pm* :: AB : *ab*; dunque MN : *mn* :: PN : *pn* :: PM : *pm*. Dunque *il triangolo* PNM, *che unisce tre vertici qualunque d'un poliedro, è simile al triangolo pnm, che unisce i tre vertici omologhi dell'altro poliedro*.

Siano inoltre Q, e *q* due vertici omologhi,

ed il triangolo PQN sarà simile a *pqn*. Dico di più che l'inclinazione dei piani PQN, PMN è eguale a quella dei piani *pqn*, *pmn*.

Poichè, se si tirino QM, e *qm*, si avrà sempre il triangolo QNM simile a *qnm*, e per conseguenza l'angolo QNM uguale a *qnm*. Concepite in N un angolo solido formato dai tre angoli piani QNM, QNP, PNM, ed in *n* un altr'angolo solido formato dai tre angoli piani *qnm*, *qnp*, *pnm*: poichè questi angoli piani son respettivamente uguali, ne segue che gli angoli solidi sono uguali. Dunque l'inclinazion dei due piani PNQ, PNM è uguale a quella dei loro omologhi *pnq*, *pnm*. Dunque, se i due triangoli PNQ, PNM fossero in un medesimo piano, nel qual caso si avrebbe l'angolo QNM=QNP+PNM, si avrebbe pure l'angolo *qnm*=*qnp*+*pnm*, ed i due triangoli *qnp*, *pnm* sarebbero parimente in un medesimo piano.

Tutto ciò, che abbiam dimostrato, ha luogo qualunque siano gli angoli M, N, P, Q paragonati ai loro omologhi *m*, *n*, *p*, *q*.

Supponiamo adesso che la superficie d'uno dei poliedri sia divisa in triangoli ABC, ACD, MNP, NPQ, ec.; si vede tosto che la superficie dell'altro poliedro conterrà un ugual numero di triangoli *abc*, *acd*, *mnp*, *npq*, ec. simili, e similmente posti. E se più triangoli, come MPN, NPQ ec., appartengono ad una medesima faccia, e sono in un medesimo piano, i loro omologhi *mpn*, *npq*, ec. saranno parimente in un medesimo pia-

no. Dunque ogni faccia poligona in un poliedro corrisponderà ad una faccia poligona simile nell'altro poliedro. Dunque i due poliedri saranno compresi da un medesimo numero di piani simili; e similmente posti. Dico di più che gli angoli solidi omologhi saranno uguali.

Poichè, se l'angolo solido N, per esempio, è formato dagli angoli piani QNP, PNM, MNR, QNR, l'angolo solido omologo *n* sarà formato dagli angoli piani *qnp*, *pnm*, *mnr*, *qnr*. Ora questi angoli piani son respettivamente uguali, e l'inclinazione di due piani adjacenti è uguale a quella dei loro omologhi. Dunque i due angoli solidi sono uguali, giacchè potrebbero essere soprapposti.

Dunque finalmente due poliedri simili hanno le facce omologhe simili, e gli angoli solidi omologhi uguali.

Corollario. Segue dalla dimostrazion precedente che, se con quattro vertici d'un poliedro si formi una piramide triangolare, e si formi un'altra piramide pure coi quattro vertici omologhi d'un poliedro simile, queste due piramidi saranno simili, perchè avranno i lati omologhi proporzionali *. *21. Seol.

Si vede nel tempo stesso che due diagonali omologhe * AN, *an* stanno fra loro come due lati omologhi AB, *ab*. * 17, 2.

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA

Due poliedri simili posson dividersi in un medesimo numero di piramidi triangolari simili respettivamente, e similmente poste.

Poichè si è già veduto che le superficie dei due poliedri si posson dividere in un medesimo numero di triangoli simili respettivamente, e similmente posti. Considerate tutti i triangoli d'un poliedro, fuorchè quelli, che formano l'angolo solido A, come basi di tante piramidi triangolari, il cui vertice è in A; queste piramidi prese insieme comporranno il poliedro. Dividete parimente l'altro poliedro in piramidi, che abbian per vertice comune quello dell'angolo *a* omologo ad A. È chiaro che la piramide, la quale congiunge quattro vertici d'un poliedro, sarà simile alla piramide, che congiunge i quattro vertici omologhi dell'altro poliedro. Dunque due poliedri simili ec.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA

Due piramidi simili stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi.

Poichè, essendo simili due piramidi, la minore potrà esser situata sulla maggiore in maniera che abbiano l'angolo solido S comune. Allora le basi ABCDE, *abcde* saranno paralelle; poichè, siccome le facce omologhe sono simili *, l'angolo S*ab* è uguale Fig. 214.

* 22.

a SAB, come pure S*bc* a SBC; dunque il
* 13, 5. piano *abc* è paralello al piano ABC *. Posto ciò, sia SO la perpendicolare abbassata dal vertice S sul piano ABC, e sia *o* il punto ove questa perpendicolare incontra il piano *abc*; si avrà, secondo quello ch' è già stato
* 15. dimostrato *, SO : S*o* :: SA : S*a* :: AB : *ab*, e per conseguenza

$$\frac{1}{3}\,SO : \frac{1}{3}\,So :: AB : ab.$$

Ma essendo le basi ABCDE, *abcde* figure simili, si ha

$$ABCDE : abcde :: \overline{AB}^{2} : \overline{ab}^{2}.$$

Moltiplicando queste due proporzioni termine per termine, ne risulterà la proporzione

$$ABCDE \times \frac{1}{3}\,SO : abcde \times \frac{1}{3}\,So : \overline{AB}^{3} : \overline{ab}^{3}.$$

Ora $ABCDE \times \frac{1}{3}SO$ è la solidità della pira-
* 18 mide SABCDE *, e $abcde \times \frac{1}{3}$ So è quella della piramide S*abcde*: dunque due piramidi simili stanno fra loro come i cubi dei loro lati omologhi.

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA

Due poliedri simili stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi.

Fig 219. Poichè due poliedri simili posson esser divisi in un medesimo numero di piramidi triangolari respettivamente simili *. Ora le due piramidi simili APNM, *apnm* stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi AM, *am*, o come i cubi dei lati omologhi AB. *ab*. Lo stesso rapporto avrà luogo fra due altre pi-

ramidi omologhe qualunque; dunque la somma di tutte le piramidi, che compongono un poliedro, ossia il poliedro stesso stà all'altro poliedro come il cubo d'un lato qualunque del primo stà al cubo del lato omologo del secondo.

Scolio generale.

Possiamo presentare in termini algebrici, cioè nella maniera più succinta, la ricapitolazione delle principali proposizioni di questo Libro riguardo alle solidità dei poliedri.

Sia B la base d'un prisma, H la sua altezza; la solidità del prisma sarà $B \times H$, o BH.

Sia B la base d'una piramide, H la sua altezza; la solidità della piramide sarà $B \times \frac{1}{3}H$, o $H \times \frac{1}{3}B$, o $\frac{1}{3}BH$.

Sia H l'altezza d'un tronco di piramide a basi paralelle; siano A, e B le sue basi; $\sqrt{AB}$ sarà la media proporzionale fra esse; la solidità del tronco sarà $\frac{1}{3}H\ (A+B+\sqrt{AB})$.

Sia B la base d'un tronco di prisma triangolare; H, H′, H″, le altezze relative ai suoi tre vertici superiori; la solidità del prisma troncato sarà $\frac{1}{3}B \times (H+H'+H'')$.

Siano finalmente P, e p le solidità di due poliedri simili; A, ed a due lati omologhi di questi poliedri; si avrà $P : p :: A^3 : a^3$.

LIBRO SETTIMO

LA SFERA

DEFINIZIONI

1. La *sfera* è un solido terminato da una superficie curva, di cui tutti i punti sono ugualmente distanti da un punto interno, che si chiama *centro*

Fig. 220. Si può immaginare che la sfera sia prodotta dalla rivoluzione del mezzo-circolo DAE intorno al diametro DE; poichè la superficie descritta con tal movimento dalla curva DAE avrà tutti i suoi punti a distanze uguali dal centro C.

2. Il *raggio della sfera* è una linea retta condotta dal centro a un punto della superficie; il *diametro*, o *asse* è una linea, che passa per il centro, e termina dalle due parti alla superficie.

Tutti i raggi della sfera sono uguali; tutti i diametri sono uguali, e doppi del raggio.

* Pr. 1. 3. Si dimostrerà * che ogni sezion della sfera fatta da un piano è un circolo: posto ciò, si chiama *gran circolo* la sezione, che

passa per il centro, *piccolo circolo* quella, che non vi passa.

4 Un *piano* è *tangente* della sfera quando ha un solo punto comune colla sua superficie.

5. *Il polo d'un circolo* della sfera è un punto della superficie ugualmente lontano da tutti i punti della circonferenza di questo circolo. Si farà veder * che ogni circolo, grande, o piccolo, ha sempre due poli. * Pr. 6.

6. *Triangolo sferico* è una parte della superficie della sfera racchiusa da tre archi di circoli grandi.

Questi archi, che si chiamano *i lati* del triangolo, vengon sempre supposti minori della mezza-circonferenza. Gli angoli, che i loro piani fanno fra loro, sono gli angoli del triangolo.

7. *Un triangolo sferico* prende il nome di *rettangolo*, *obliquangolo*, *isoscele*, *equilatero* ne' casi stessi d'un triangolo rettilineo.

8. *Poligono sferico* è una parte della superficie della sfera racchiusa da tre, o più archi di circoli grandi.

9. *Fuso* è la parte della superficie della sfera compresa fra due gran mezzi-circoli, che terminano a un diametro comune.

10. Chiamerò *cuneo*, o *unghia sferica* la parte del solido della sfera compresa fra i medesimi gran mezzi-circoli, ed alla quale il fuso serve di base.

11. *Piramide sferica* è la parte del solido della sfera compresa fra i piani d'un angolo

solido, il cui vertice è al centro. La base della piramide sarà un poligono sferico intercetto tra i medesimi piani.

12. Si chiama *zona* la parte della superficie della sfera compresa fra due piani paralelli, che sono le basi: uno di questi piani può esser tangente della sfera, ed allora la zona ha una sola base.

13. *Segmento sferico* è la porzione del solido della sfera compresa fra due piani paralelli, che sono le basi; uno di questi piani può esser tangente della sfera, ed allora il segmento sferico ha una sola base.

14. L'*asse*, o *altezza* d'una zona, e d'un segmento è la distanza dei due piani paralelli, che son le basi della zona, o del segmento addetto.

Fig. 220. 15. Mentre il mezzo-circolo DAE girando intorno al diametro DE descrive la sfera, ogni settor circolare, come DCF, o FCH, descrive un solido, che si chiama *settore sferico*.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA

Se la sfera è tagliata da un piano qualunque, la sezione sarà un circolo.

Fig. 221. Sia AMB la sezione fatta da un piano nella sfera, il cui centro è C. Dal punto C conducete la perpendicolare CO sul piano AMB, e più linee rette CM, CM a diversi punti della curva qualunque siasi AMB, che termina la sezione.

Le oblique CM, CM, CB sono uguali, poichè son raggi della sfera; esse son dunque ugualmente lontane dalla perpendicolare CO *; dunque tutte le linee OM, OM, OB sono uguali; dunque la sezione AMB è un circolo, di cui il punto O è il centro. * 5, 5.

Corollario I. Se la sezione passa per il centro della sfera, il suo raggio sarà il raggio della sfera; dunque tutti i gran circoli sono uguali fra loro.

Corollario II. Due gran circoli si tagliano sempre in due parti uguali, poichè la loro comune intersezione, passando per il centro, è un diametro.

Corollario III. Ogni gran circolo divide la sfera, e la sua superficie in due parti uguali; poichè se, dopo aver separato i due emisferi, si applicano sulla base comune rivolgendo la convessità dal medesimo lato, le due superficie coincideranno una coll'altra, senza di che vi sarebber dei punti più vicini al centro gli uni degli altri.

Corollario IV. Il centro d'un piccolo circolo, e quello della sfera sono sopra una medesima retta perpendicolare al piano del circolo piccolo.

Corollario V. I circoli piccoli sono tanto più piccoli quanto sono più lontani dal centro della sfera; poichè, quanto è più grande la distanza CO, tanto è più piccola la corda AB, diametro del piccol circolo AMB.

Corollario VI. Per due punti dati sulla superficie d'una sfera si può far passare un

arco di circolo grande; poichè i due punti dati, e il centro della sfera sono tre punti, che determinano la posizione d'un piano. Ma, se i due punti dati fossero alle estremità d'un diametro, allora questi due punti, ed il centro sarebbero in linea retta, e vi sarebbe un'infinità di circoli grandi, che potrebber passare per i due punti dati.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA

Fig. 222. *In ogni triangolo sferico* ABC *un lato qualunque è minor della somma degli altri due.*

Sia O il centro della sfera, e siano condotti i raggi OA, OB, OC. Se s'immaginano i piani AOB, AOC, COB, questi piani formeranno al punto O un angolo solido; e gli angoli AOB, AOC, COB avranno per misura i lati AB, AC, BC del triangolo sferico ABC. Ora ciascuno dei tre angoli piani, che compongono l'angolo solido, è minor della
* 21, 5. somma degli altri due *; dunque un lato qualunque del triangolo ABC è minor della somma degli altri due.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA

Il più corto cammino da un punto ad un altro sulla superficie della sfera è l'arco di circolo grande, che unisce i due punti dati.

Fig. 223. Sia ANB l'arco di circolo grande, che unisce i punti A, e B, e sia fuor di quest'arco, se è possibile, M un punto della linea la più

corta fra A, e B. Per il punto M conducete gli archi di circolo grande MA, MB, e prendete BN=MB.

Per il teorema precedente, ANB è più corto di AM+MB; togliendo da ambedue le parti BN=BM, resterà AN<AM. Ora la distanza da B a M, ossia ch' essa si confonda coll' arco BM, o ch' ella sia qualunque altra linea, è uguale alla distanza da B a N; poichè, facendo girare il piano del circolo grande BM intorno al diametro, che passa per B, si può condurre il punto M sul punto N, e allora la linea più corta da M a B, qualunque sia, si confonderà con quella da N a B; dunque i due cammini da A a B, l' uno che passa per M, l' altro per N, hanno una parte uguale da M a B, e da N a B. Il primo cammino, per supposizione, è il più corto: dunque la distanza da A a M è più corta della distanza da A a N; il che è assurdo, poichè l' arco AM è maggiore di AN. Dunque verun punto della linea più corta fra A, e B non può essere fuori dell' arco ANB; dunque quest' arco stesso è la linea più corta fra le di lui estremità.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA

La somma dei tre lati d' un triangolo sferico è minore della circonferenza d' un circolo grande.

Sia ABC un triangolo sferico qualunque; prolungate i lati AB, AC finchè s' incontri- Fig. 225.

no di nuovo in D. Gli archi ABD, ACD saranno mezze-circonferenze, poichè due circoli grandi si tagliano sempre in due parti
* 1. uguali *: ma nel triangolo BCD il lato BC<
* 2. BD+CD *; aggiungendo dalle due parti AB+AC, si avrà AB+AC+BC<ABD+ACD, cioè minore d'una circonferenza.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA

La somma dei lati d'ogni poligono sferico è minore della circonferenza d'un circolo grande.

Fig. 225. Sia, per esempio, il pentagono ABCDE; prolungate i lati AB, DC finchè s'incontrino in F: poichè BC è minore di BF+CF, il contorno del pentagono ABCDE è minore di quello del quadrilatero AEDF. Prolungate nuovamente i lati AE, FD finchè s'incontrino in G; si avrà ED<EG+GD; dunque il contorno del quadrilatero AEDF è minore di quello del triangolo AFG; questo è minore della circonferenza d'un circolo grande: dunque a più forte ragione il contorno del poligono ABCDE è minore della stessa circonferenza.

Scolio. Questa proposizione è in sostanza la medesima della 22. del Libro 5. Perchè, se O è il centro della sfera, si può immaginare al punto O un angolo solido formato dagli angoli piani AOB, BOC, COD, ec., e la somma di questi angoli debb'esser minore di quattro angoli retti; il che non dif-

ferisce dalla proposizione presente. La dimostrazione, che ora ne abbiamo data, è differente da quella del Libro quinto: l'una, e l'altra però suppongono che il poligono ABCDE sia *convesso*, ovvero che verun lato prolungato non tagli la figura.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA

Se si conduce il diametro DE *perpendicolare al piano del circolo grande* AMB, *le estremità* D, *ed* E *di questo diametro saranno i poli del circolo* AMB, *e di tutti i piccoli circoli, come* FNG, *che gli son paralelli.* Fig. 220.

Poichè DC essendo perpendicolare al piano AMB, è perpendicolare a tutte le rette CA, CM, CB, ec. condotte dal suo piede in questo piano; dunque tutti gli archi DA, DM, DB, ec. sono quarte parti di circonferenza; lo stesso è degli archi EA, EM, EB, ec. Dunque ciascuno dei punti D, ed E è ugualmente lontano da tutti i punti della circonferenza AMB; dunque essi sono i poli della circonferenza medesima *. * Def. 5.

In secondo luogo il raggio DC, perpendicolare al piano AMB, è perpendicolare al suo paralello FNG; dunque passa per il centro O del circolo FNG *; dunque, se si tirin * 1.
le oblique DF, DN, DG, queste si allontaneranno ugualmente dalla perpendicolare DO, e saranno uguali. Ma, essendo uguali le corde, sono uguali gli archi; dunque tutti gli archi DF, DN, DG, ec. sono

fra loro uguali; dunque il punto D è il polo del circolo piccolo FNG, e per la medesima ragione il punto E è l'altro polo.

Corollario I Ogni arco DM condotto da un punto dell'arco di circolo grande AMB al suo polo è un quarto di circonferenza, che noi per abbreviare lo chiameremo *quadrante*, e questo *quadrante* fa nel medesimo tempo un angolo retto coll'arco AM. Poichè, essendo la linea DC perpendicolare al piano AMC, ogni piano DMC, che passa per la linea DC, è perpendicolare al piano AMC*; dunque l'angolo di questi piani, o seguendo la definizione 6. AMD è un angolo retto.

* 18, 5.

Corollario II. Per trovare il polo d'un arco dato AM conducete l'arco indefinito MD perpendicolare ad AM; prendete MD uguale a un *quadrante*, ed il punto D sarà uno dei poli dell'arco AM: ovvero conducete per i due punti A, e M gli archi AD, e MD perpendicolari ad AM; il punto d'incontro D di questi due archi sarà il polo richiesto.

Corollario III. Reciprocamente, se la distanza del punto D da ciascuno dei punti A, e M è uguale a un *quadrante*, dico che il punto D sarà il polo dell'arco AM, e che nel medesimo tempo gli angoli DAM, AMD saranno retti.

Poichè sia C il centro della sfera, e siano condotti i raggi CA, CD, CM: giacchè gli angoli ACD, MCD sono retti, la linea CD è perpendicolare alle due rette CA, CM; dunque è perpendicolare al lor piano; dun-

que il punto D è il polo dell'arco AM; e però gli angoli DAM, AMD sono retti.

Scolio. Le proprietà dei poli permettono di segnare sulla superficie della sfera degli archi di circolo colla medesima facilità che sopra una superficie piana. Si vede, per esempio, che facendo girare l'arco DF, od ogni altra linea dello stesso intervallo intorno al punto D, l'estremità F descriverà il piccolo circolo FNG; e, se si fa girare il *quadrante* DFA intorno al punto D, l'estremità A descriverà l'arco di circolo grande AM.

Se bisogni prolungar l'arco AM, o se non sian dati che i soli punti A, e M, per cui deve passar quest'arco, si determinerà prima il polo D coll'intersezion di due archi, descritti dai punti A, e M, come centri, con un intervallo uguale al *quadrante*. Essendo trovato il polo D, si descriverà dal punto D, come centro, e col medesimo intervallo l'arco AM, ed il suo prolungamento.

Finalmente, se da un punto dato P si dee abbassare un arco perpendicolare sull'arco dato AM, si prolungherà quest'arco in S fino a che quest'intervallo PS sia eguale a un quadrante; in seguito dal polo S, e col medesimo intervallo si descriverà l'arco PM, che sarà l'arco perpendicolare richiesto.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA

Ogni piano perpendicolare all' estremità d'un raggio è tangente della sfera.

Fig. 226 Sia FAG un piano perpendicolare all'estremità del raggio OA; se si prende un punto qualunque M su questo piano, e che si tirino OM, ed AM, l'angolo OAM sarà retto, e però la distanza OM sarà maggiore di OA. Il punto M è dunque fuor della sfera; e siccome è lo stesso per ogni altro punto del piano FAG, ne segue che questo piano ha il solo punto A comune colla superficie della sfe-
* Def. 4. ra; dunque è tangente di questa superficie *.

Scolio: Si può provar parimente che due sfere hanno un sol punto comune, e sono per conseguenza *tangenti* l'una dell'altra, quando la distanza dei loro centri è uguale alla somma, o alla differenza dei loro raggi. Allora i centri, ed il punto di contatto sono in linea retta.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA

Fig. 226. *L'angolo* BAC, *che fanno fra loro due archi di circoli grandi* AB, AC, *è uguale all'angolo* FAG *formato dalle tangenti di questi archi al punto* A: *ha pur per misura l'arco* DE *descritto dal punto* A, *come polo, fra i lati* AB, AC, *prolungati, se sia necessario.*

Poichè la tangente AF condotta nel piano dell'arco AB è perpendicolare al raggio AO; la tangente AG condotta nel piano dell'arco AC è perpendicolare al medesimo raggio AO: dunque l'angolo FAG è uguale
* 17, 5. all'angolo dei piani OAB, OAC *, ch'è

quello degli archi AB, AC, e che s'indica con BAC.

Parimente, se l'arco AD è uguale a un *quadrante*, come pure AE, le linee OD, OE saranno perpendicolari ad AO, e perciò l'angolo DOE sarà uguale all'angolo dei piani AOD, AOE. Dunque l'arco DE è la misura dell'angolo di questi piani, ossia la misura dell'angolo BAC.

Corollario. Gli angoli dei triangoli sferici possono paragonarsi fra loro per mezzo degli archi di circoli grandi descritti dai loro vertici, come poli, e compresi fra i loro lati. Laond'è facile far un angolo sferico uguale ad un angolo dato.

Scolio. L'angolo ACO è eguale al suo opposto al vertice BCN; l'uno, o l'altro è sempre l'angolo formato dai due piani ACB, OCN. Fig. 238.

Si vede pure che nell'incontro dei due archi ACB, OCN i due angoli adjacenti ACO, OCB presi insieme equivalgono sempre a due angoli retti.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA

Essendo dato il triangolo sferico ABC, *se dai punti* A, B, C, *come poli, si descrivano gli archi* EF, FD, DE, *che formino il triangolo* DEF, *reciprocamente i tre punti* D, E, F *saranno i poli dei lati* BC, AC, AB. Fig. 227.

Poichè, essendo il punto A il polo dell'arco EF, la distanza AE è un *quadrante;* es-

sendo il punto C il polo dell'arco DE, la distanza CE è parimente un *quadrante*; dunque il punto E è lontano un *quadrante* da ciascuno dei punti A, e C; dunque è il polo dell'arco AC *. Si dimostrerà del pari che D è il polo dell'arco BC, e F quello dell'arco AB.

* 6. Cor. 3.

Corollario. Dunque il triangolo ABC può esser descritto per mezzo di DEF, come DEF per mezzo di ABC.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA

Fig 227. *Poste le medesime cose del teorema precedente, ciascun angolo d'un dei triangoli* ABC, DEF *avrà per misura la mezza-circonferenza meno il lato opposto nell'altro triangolo*.

Sian prolungati, se è necessario, i lati AB, AC finchè incontrino EF in G, e H: poichè il punto A è il polo dell'arco GH, l'angolo A avrà per misura l'arco GH: ma l'arco EH è un *quadrante*, come pure GF, giacchè E è il polo di AH, e F è il polo di AG: dunque EH+GF equivale ad una mezza-circonferenza. Ora EH+GF è lo stesso che EF+GH. Dunque l'arco GH, che misura l'angolo A, è uguale ad una mezza-circonferenza meno il lato EF; parimente l'angolo B avrà per misura $\frac{1}{2}$ *circ.* — DF, e l'angolo C $\frac{1}{2}$ *circ.* — DE.

Questa proprietà dev'esser reciproca fra i due triangoli, giacchè si descrivono nella

stessa maniera l'uno col mezzo dell'altro. Perciò si troverà che gli angoli D, E, F del triangolo DEF hanno per misura respettivamente $\frac{1}{2}$*circ.* — BC, $\frac{1}{2}$*circ.* — AC, $\frac{1}{2}$*circ.* — AB. Infatti l'angolo D, per esempio, ha per misura l'arco MI: ora MI+BC=MC+BI=$\frac{1}{2}$*circ.* Dunque l'arco MI, misura dell'angolo D, =$\frac{1}{2}$*circ.*—BC; e così degli altri.

Scolio. Bisogna osservare che oltre al triangolo DEF se ne potrebber formare tre altri con l'intersezion dei tre archi DE, EF, DF. Ma la proposizione attuale non ha luogo che per il triangol centrale, che è distinto dagli altri tre in questo che i due angoli A, e D son situati da una medesima parte di BC, i due B, ed E da una medesima parte di AC, ed i due C, e F da una medesima parte di AB. Fig. 228. Fig. 227.

Si danno diversi nomi ai due triangoli ABC, DEF: noi gli chiameremo *triangoli polari*.

PROPOSIZIONE XI.

LEMMA

Essendo dato il triangolo ABC, *se dal polo* A, *e coll'intervallo* AC *si descriva l'arco di piccol circolo* DEC; *se dal polo* B, *e coll'intervallo* BC *si descriva parimente l'arco* DFC; *e dal punto* D, *ove gli archi* DEC, DFC *si taglieranno, si conducano gli archi di circolo grande* AD, DB; *dico che il triangolo* ADB *così formato avrà le sue parti uguali a quelle del triangolo* ABC. Fig. 229.

Poichè, per costruzione, il lato AD=AC, DB=BC, AB è comune; dunque questi triangoli hanno i lati respettivamente uguali. Dico adesso che gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali.

Infatti, se si suppone il centro della sfera in O, si può concepire un angolo solido formato al punto O dai tre angoli piani AOB, AOC, BOC; si può concepir parimente un secondo angolo solido formato dai tre angoli piani AOB, AOD, BOD. E poichè i lati del triangolo ABC sono uguali a quelli del triangolo ABD, ne segue che gli angoli piani, che forman uno di questi angoli solidi, sono respettivamente uguali agli angoli piani, che forman l'altro angolo solido. Ma
* 23, 5. in tal caso si è dimostrato * che i piani, in cui sono gli angoli uguali, son ugualmente inclinati fra loro; dunque gli angoli del triangolo sferico DAB sono uguali a quelli del triangolo CAB, cioè DAB=BAC, DBA=ABC, e ADB=ACB. Dunque i lati, e gli angoli del triangolo ADB sono uguali ai lati, e agli angoli del triangolo ACB.

Scolio. L'uguaglianza di questi triangoli non è però un'uguaglianza assoluta, o di soprapposizione, perchè sarebbe impossibile d'applicar l'uno sull'altro esattamente, salvo che non fossero isosceli. L'uguaglianza, di cui si tratta, è quella, che abbiamo già chiamata uguaglianza di *simmetria*, e perciò chiameremo i triangoli ACB, ADB *triangoli simmetrici*.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA

Due triangoli situati sopra la medesima sfera, o sopra sfere uguali, sono uguali in tutte le loro parti quando hanno un angolo uguale compreso fra lati respettivamente uguali.

Sia il lato AB=EF, il lato AC=EG, e l'angolo BAC=FEG; il triangolo EFG potrà esser situato sopra il triangolo ABC, o sul suo simmetrico ABD nella medesima maniera che si soprappongono due triangoli rettilinei, che hanno un angolo uguale compreso fra lati uguali. Dunque tutte le parti del triangolo EFG saranno uguali a quelle del triangolo ABC, cioè, oltre le tre parti, che sono supposte uguali, si avrà il lato BC=FG, l'angolo ABC=EFG, e l'angolo ACB=EGF. Fig. 230.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA

Due triangoli situati sopra la medesima sfera, o sopra sfere uguali, sono uguali in tutte le loro parti quando hanno un lato uguale adjacente a due angoli respettivamente uguali.

Poichè uno di questi triangoli può essere situato sopra l'altro, o sul suo simmetrico, come si è spiegato nel caso simile dei triangoli rettilinei. *Ved. la Prop. VII. del Lib. I.*

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA

Se due triangoli situati sulla medesima sfera, o sopra sfere uguali, sono equilateri fra loro, saranno anche equiangoli, e gli angoli uguali saranno opposti ai lati uguali.

Fig. 229. Ciò è manifesto per la Prop. XI., ove si è veduto che con tre lati dati AB, AC, BC non si può fare che due triangoli ACB, ABD differenti in quanto alla posizion delle parti, ma uguali in quanto alla grandezza di queste medesime parti. Dunque due triangoli equilateri fra loro sono o assolutamente uguali, o almeno uguali per simmetria; in ambedue i casi sono equiangoli, e gli angoli uguali sono opposti ai lati uguali.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA

In ogni triangolo sferico isoscele gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali; e reciprocamente, se due angoli d' un triangolo sferico son uguali, il triangolo sarà isoscele.

Fig. 231. 1.° Sia il lato AB=AC; dico che si avrà l'angolo C=B; poichè, se dal vertice A al punto D, mezzo della base, si conduce l' arco AD, i due triangoli ABD, ADC avranno i tre lati respettivamente uguali, cioè AD comune, BD=DC, e AB=AC; dunque, per il teorema precedente, questi triangoli avranno gli angoli uguali, e si avrà B=C.

2.° Sia l' angolo B=C; dico che sarà AC=

AB: poichè, se il lato AB non è uguale ad AC, sia AB il più grande di essi; prendete BO=AC, e tirate OC. I due lati BO, BC sono uguali ai due lati AC, BC; l'angolo compreso dai primi OBC è uguale all'angolo compreso dai secondi ACB. Dunque i due triangoli BOC, ACB hanno le altre parti uguali *, e per conseguenza l'angolo OCB=ABC: ma l'angolo ABC, per supposizione, =ACB; dunque si avrebbe OCB=ACB; il che è impossibile. Dunque non si può supporre AB differente da AC; dunque i lati AB, AC opposti agli angoli uguali C, e B sono uguali. * 12.

Scolio. La medesima dimostrazione prova che l'angolo BAD=DAC, e l'angolo BDA=ADC. Dunque questi due ultimi sono retti: dunque *l'arco condotto dal vertice d'un triangolo sferico isoscele al mezzo della sua base è perpendicolare a questa base, e divide l'angolo al vertice stesso in due parti uguali.*

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA

In un triangolo sferico ABC, *se l'angolo* A *è maggiore dell'angolo* B, *il lato* BC *opposto all'angolo* A *sarà maggiore del lato* AC *opposto all'angolo* B: *reciprocamente, se il lato* BC *è maggiore di* AC, *l'angolo* A *sarà maggiore dell'angolo* B. Fig. 232.

1.° Sia l'angolo A>B; fate l'angolo BAD=B, avrete AD=DB *; ma AD+DC * 15.

è maggiore di AC; invece di AD mettendo DB, si avrà DB+DC, o BC>AC.

2.° Se si suppone BC>AC, dico che l'angolo BAC sarà maggiore di ABC. Poichè, se BAC fosse uguale ad ABC, si avrebbe BC=AC; e, se fosse BAC<ABC, ne nascerebbe secondo ciò, che si è dimostrato, BC<AC; il che è contro la supposizione. Dunque BAC è maggiore di ABC.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA

Fig. 233. *Se i due lati* AB, AC *del triangolo sferico* ABC *sono uguali ai due lati* DE, DF *del triangolo* DEF *fatto sopra una sfera uguale; se nello stesso tempo l'angolo* A *è maggiore dell'angolo* D; *dico che il terzo lato* BC *del primo triangolo sarà maggiore del terzo* EF *del secondo triangolo.*

La dimostrazione è assolutamente simile a quella della Prop. X., Lib. I.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA

Se due triangoli descritti sulla medesima sfera, o sopra sfere uguali, sono equiangoli fra di loro, saranno anche equilateri.

Siano A, e B i due triangoli dati; P, e Q i loro triangoli polari. Poichè gli angoli sono uguali nei triangoli A, e B, i lati saranno
* 10. uguali nei polari P, e Q *. Ma dall'essere i triangoli P, e Q equilateri fra loro ne segue
* 14 che sono ancora equiangoli *. Finalmente

dall' essere uguali gli angoli ne' triangoli P, e Q ne segue * che i lati sono uguali nei loro polari A, e B. Dunque i triangoli equiangoli A, e B sono nel medesimo tempo equilateri fra di loro. * 10.

Si può ancor dimostrare la medesima proposizione senza il soccorso dei triangoli polari.

Siano ABC, DEF due triangoli equiangoli fra loro, talmente che sia A=D, B=E, C=F; dico che sarà il lato AB=DE, AC=DF, BC=EF. Fig. 234.

Sul prolungamento dei lati AC, AB prendete AG=DE, e AH=DF; tirate GH, e prolungate gli archi BC, GH finchè s'incontrino in I, e K.

I due lati AG, AH sono, per costruzione, uguali ai due DE, DF; l'angolo compreso GAH=BAC=EDF; dunque * i triangoli AGH, DEF sono uguali in tutte le loro parti, e si ha l'angolo AGH=DEF=ABC, e l'angolo AHG=DFE=ACB. * 12.

Nei triangoli IBG, KBG il lato BG è comune, l'angolo IGB=GBK; e poichè IGB+BGK è uguale a due retti, come pure GBK+IBG, ne segue che BGK=IBG. Dunque i triangoli IBG, GBK sono uguali *, e si ha IG=BK, ed IB=GK. * 13.

Parimente dall' essere l'angolo AHG=ACB, si conchiuderà che i triangoli ICH, HCK hanno un lato uguale adjacente a due angoli uguali. Dunque sono uguali; dunque IH=CK, e HK=IC.

Adesso, se dalle uguali BK, IG si tolgon le uguali CK, IH, i resti BC, GH saranno uguali. D'altronde l'angolo BCA=AHG, e l'angolo ABC=AGH. Dunque i triangoli ABC, AHG hanno un lato uguale adjacente a due angoli uguali; dunque sono uguali. Ma il triangolo DEF è uguale in tutte le sue parti al triangolo AHG; dunque è uguale anche al triangolo ABC, e si avrà AB=DE, AC=DF, BC=EF. Dunque, se due triangoli sferici sono uguali fra loro, i lati opposti agli angoli uguali saranno uguali.

Scolio. Questa proposizion non ha luogo nei triangoli rettilinei, ove dall'uguaglianza degli angoli non si può dedurre altro che la proporzionalità respettiva dei lati. Ma è facile di concepire la differenza, che passa rapporto a ciò tra i triangoli rettilinei, ed i triangoli sferici. Nella proposizione presente, come pure nelle proposizioni 12, 13, 14, e 17, ove si tratta del paragon dei triangoli, si dice espressamente che questi triangoli son descritti sulla medesima sfera, o sopra sfere uguali. Ora gli archi simili sono proporzionali ai raggi; dunque sopra sfere uguali due triangoli non possono esser simili senza essere uguali. Non fa meraviglia dunque che l'uguaglianza degli angoli porti seco l'uguaglianza dei lati.

Sarebbe altrimenti se i triangoli fosser descritti sopra sfere disuguali: allora, essendo uguali gli angoli, i triangoli sarebbero si-

mili, e i lati omologhi sarebber fra loro come i raggi delle sfere.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA

La somma degli angoli d'ogni triangolo sferico è minore di sei, e maggiore di due angoli retti.

Poichè 1.° ciascun angolo d'un triangolo sferico è minore di due angoli retti (*vedete lo scolio seguente*); dunque la somma dei tre angoli è minore di sei angoli retti.

2.° La misura di ciascun angolo d'un triangolo sferico è uguale alla mezza-circonferenza meno il lato corrispondente del triangolo polare *. Dunque la somma dei tre angoli ha per misura tre mezze-circonferenze meno la somma dei lati del triangolo polare. Ora quest'ultima somma è minore di una circonferenza *; dunque togliendola da tre mezze-circonferenze, resterà più d'una mezza-circonferenza, che è la misura di due angoli retti. Dunque 2.° la somma dei tre angoli di un triangolo sferico è maggiore di due angoli retti.

* 10.

* 4.

Corollario I. La somma degli angoli d'un triangolo sferico non è costante come quella dei triangoli rettilinei; varia da due angoli retti fino a sei, senza poter essere uguale nè all'uno, nè all'altro limite. Quindi è che due angoli dati non fan conoscere il terzo.

Corollario II. Un triangolo sferico può

avere due, o tre angoli retti, due o tre angoli ottusi.

Fig. 235. Se il triangolo ABC è *bi-rettangolo*, cioè se ha due angoli retti B, e C, il vertice A
* 6. sarà il polo della base BC *, ed i lati AB, AC saranno *quadranti*.

Se in oltre l'angolo A è retto, il triangolo ABC sarà *tri-rettangolo*, i suoi angoli saranno tutti retti, ed i suoi lati *quadranti*. Il triangolo *tri-rettangolo* è contenuto otto volte nella superficie della sfera, il che si vede per mezzo della fig. 236. supponendo l'arco MN uguale a un *quadrante*.

Scolio. Abbiamo supposto in tutto ciò, che precede, e conforme alla definizione 6., che i triangoli sferici hanno i loro lati sempre minori della mezza-circonferenza; allora ne segue che gli angoli son sempre minori di
Fig. 224. due angoli retti. Perchè, se il lato AB è minore della mezza-circonferenza, come pure AC, questi archi deggiono essere prolungati ambedue per incontrarsi in D. Ora i due angoli ABC, CBD presi insieme equivalgono a due angoli retti; dunque l'angolo ABC solo è minore di due angoli retti.

Osserveremo però ch'esistono dei triangoli sferici, di cui certi lati son maggiori della circonferenza, e certi angoli son maggiori di due angoli retti. Perchè, se si prolunga il lato AC in una circonferenza intera ACE, ciò che resta togliendo dalla mezza-sfera il
* 7. triangolo ABC, è un nuovo triangolo, che si può pure indicare con ABC, e i di cui lati

sono AB, BC, AEC. Si vede dunque che il lato AEC è maggiore della mezza-circonferenza AED; ma nel medesimo tempo l'angolo opposto in B supera due angoli retti della quantità angolare CBD.

Del resto si sono esclusi dalla definizione i triangoli, i cui lati, ed angoli sono sì grandi, perchè la loro risoluzione, o la determinazione delle lor parti si riduce sempre a quella dei triangoli compresi nella definizione suddetta. Infatti si vede facilmente che, se si conoscono gli angoli, e i lati del triangolo ABC, si conosceranno immediatamente gli angoli, e i lati del triangolo, ch'è il resto della mezza-sfera.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA

Il fuso AMBNA *stà alla superficie della sfera come l'angolo* MAN *di questo fuso stà a quattro angoli retti, o come l'arco* MN, *che misura quest'angolo, stà alla circonferenza.* Fig. 236.

Supponiamo primieramente che l'arco MN stia alla circonferenza MNPQ in un rapporto razionale, per esempio, come 5 stà a 48. Si dividerà la circonferenza MNPQ in 48 parti uguali, di cui MN ne conterrà 5; congiungendo dipoi il polo A, ed i punti di divisione con altrettanti quarti di circonferenza, si avranno 48 triangoli nella mezza-sfera AMNPQ, che saranno tutti uguali fra loro, poichè avranno tutte le loro parti ugua-

li. La sfera intera conterrà dunque 96 di tali triangoli parziali, ed il fuso AMBNA ne conterrà 10; dunque il fuso stà alla superficie della sfera come 10 stà a 96, o come 5 stà 48, cioè, come l'arco MN stà alla circonferenza.

Se l'arco MN non fosse commensurabile colla circonferenza, si proverà collo stesso ragionamento, di cui si son già veduti molti esempj, che il fuso stà sempre alla superficie della sfera come l'arco MN stà alla circonferenza.

Corollario I. Due fusi stanno fra loro come i loro angoli respettivi.

Corollario II. Si è già veduto che la superficie intera della sfera è uguale a otto
* 19. triangoli tri-rettangoli *. Dunque, se si prende per unità l'area d'uno di questi triangoli, la superficie della sfera sarà rappresentata da 8. Posto ciò, la superficie del fuso, il cui angolo è A, sarà espressa da 2A (se però l'angolo A è valutato nella supposizione che l'angolo retto sia uguale all'unità); poichè si ha $2A : 8 :: A : 4$. Vi sono quì dunque due unità differenti; una per gli angoli, ed è l'angolo retto; l'altra per le superficie, ed è il triangolo sferico tri-rettangolo, ossia quello, di cui tutti gli angoli sono retti, e i lati son quarte parti di circonferenza.

Scolio. L'unghia sferica compresa fra i piani AMB, ANB stà al solido intero della sfera come l'angolo A stà a quattro angoli

retti. Poichè, essendo uguali i fusi, le unghie sferiche saranno parimente uguali: Dunque due unghie sferiche stanno fra loro come i loro angoli formati dai piani, che le comprendono.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA

Due triangoli sferici simmetrici sono eguali in superficie.

Sieno ABC, DEF due triangoli simmetrici, vale a dir due triangoli, che hanno i lati eguali, cioè AB=DE, AC=DF, BC=EF, e che frattanto non posson essere soprapposti; dico che la superficie ABC è eguale alla superficie DEF. Fig. 237.

Sia P il polo del piccol circolo, che passerebbe per i tre punti A, B, C (1); dal punto P sien condotti gli archi eguali * PA, PB, PC; al punto F fate l'angolo DFQ=ACP, l'arco FQ=CP, e tirate DQ, EQ. * 6.

I lati DF, FQ sono eguali ai lati AC, CP; l'angolo DFQ=ACP; dunque i due triangoli DFQ, ACP sono eguali in tutte le loro parti *; dunque il lato DQ=AP, e * 12. l'angolo DQF=APC.

---

(1) Il circolo, che passa per i tre punti A, B, C, o ch'è circoscritto al triangolo ABC, non può essere che un piccol circolo della sfera; perchè, se questo fosse un gran circolo, i tre lati AB, BC, AC sarebbero situati in un medesimo piano, e il triangolo ABC si ridurrebbe ad un dei suoi lati.

Nei triangoli divisati DFE, ABC gli angoli DFE, ACB opposti ai lati eguali DE,
* 11. AB sono eguali; * se si tolgono gli angoli DFQ, ACP, eguali per costruzione, resterà l'angolo QFE eguale a PCB. D'altronde i lati QF, FE sono eguali ai lati PC, CB; dunque i due triangoli FQE, CPB son eguali in tutte le loro parti; dunque il lato QE=PB, e l'angolo FQE=CPB.

Se si osserva adesso che i triangoli DFQ, ACP, che hanno i lati respettivamente eguali, son nel medesimo tempo isosceli, si vedrà che posson essere soprapposti l'uno all'altro; perchè, avendo situato PA sopra il suo eguale QF, il lato PC cadrà sopra il suo eguale QD, e così i due triangoli si confonderanno in un solo; dunque sono eguali; dunque la superficie DQF=APC. Per una simil ragione, la superficie FQE=CPB, e la superficie DQE=APB; dunque si ha DQF+FQE—DQE=APC+CPB—APB, ovvero DFE=ABC; dunque i due triangoli simmetrici ABC, DEF sono eguali in superficie.

Scolio. I poli P, e Q potrebber essere situati dentro ai triangoli ABC, DEF; allora bisognerebbe aggiungere i tre triangoli DQF, FQE, DQE affin di comporne il triangolo DEF, e similmente bisognerebbe aggiungere i tre triangoli APC, CPB, APB per comporne il triangolo ABC; d'altronde la dimostrazione, e la conclusione sarebbero sempre le stesse.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA

Se due gran circoli AOB, COD *si taglino come si voglia nell' emisfero* AOCBD, *la somma dei triangoli opposti* AOC, BOD *sarà uguale al fuso, il cui angolo è* BOD. Fig. 238.

Poichè, prolungando gli archi OB, OD nell' altro emisfero finchè s'incontrino in N, OBN sarà una mezza-circonferenza, come pure AOB; togliendo OB da ambedue, si avrà BN=AO. Per una simil ragione DN=CO, e BD=AC. Dunque i due triangoli AOC, BDN hanno i tre lati uguali; d' altronde la lor posizione è tale ch' essi sono simmetrici l' uno dell' altro; dunque sono eguali in superficie *, e la somma dei triangoli AOC, BOD è equivalente al fuso OBNDO, il cui angolo è BOD. * 21.

Scolio. È chiaro pure che le due piramidi sferiche, che hanno per base i triangoli AOC, BOD, prese insieme equivalgono all' unghia sferica, il di cui angolo è BOD.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA

La superficie d' un triangolo sferico qualunque ha per misura l' eccesso della somma dei suoi tre angoli sopra due angoli retti.

Sia ABC il triangolo proposto; prolungate i suoi lati finchè incontrino il gran circolo DEFG condotto a piacere fuor del triangolo. Per il teorema precedente i due triangoli Fig. 239.

ADE, AGH presi insieme equivalgono al fuso, il cui angolo è A, e che ha per misura
* 20. 2A *. Laonde si avrà ADE+AGH=2A; per una simil ragione BGF+BID=2B, CIH +CFE=2C. Ma la somma di questi sei triangoli supera la mezza-sfera di due volte il triangolo ABC; d' altronde la mezza-sfera è rappresentata da 4; dunque il doppio del triangolo ABC è uguale a 2A+2B+2C—4, e per conseguenza ABC=A+B+C—2. Dunque un triangolo sferico ha per misura la somma dei suoi angoli meno due angoli retti.

Corollario I. Quanti angoli retti vi saranno in tal misura, altrettanti triangoli tri-rettangoli, od ottave parti di sfera, ciascuna
* 20. delle quali è l'unità di superficie *, saranno contenute nel triangol proposto. Per esempio, se gli angoli sono tutti uguali a $\frac{4}{3}$ d'un angolo retto, allora i tre angoli varranno 4 angoli retti, ed il triangolo proposto sarà rappresentato da 4—2, o 2; dunque sarà uguale a due triangoli tri-rettangoli, o alla quarta parte della superficie della sfera.

Corollario II. Il triangolo sferico ABC è equivalente al fuso, il cui angolo è $\frac{A+B+C}{2}$ —1; ed anche la piramide sferica, la cui base è ABC, equivale all'unghia sferica, il di cui angolo è $\frac{A+B+C}{2}$ —1.

Scolio. Nello stesso tempo che si paragona il triangolo sferico ABC al triangolo tri-rettangolo, la piramide sferica, che ha per base

ABC, si paragona, e segue la medesima proporzione colla piramide tri-rettangola. L'angolo solido al vertice della piramide si paragona parimente coll'angolo solido al vertice della piramide tri-rettangola. Infatti il paragone si stabilisce per mezzo della coincidenza delle parti. Ora, se le basi delle piramidi coincidono, è chiaro che le piramidi stesse coincideranno, come pure gli angoli al loro vertice. Da ciò nascono più conseguenze.

1.° Due piramidi triangolari sferiche stanno fra loro come le loro basi; e poichè una piramide poligona si può dividere in più piramidi triangolari, ne segue che due piramidi sferiche qualunque stanno fra loro come i poligoni, che servon ad esse di basi.

2.° Gli angoli solidi al vertice delle medesime piramidi stanno ugualmente nella proporzion delle basi. Dunque, per paragonare due angoli solidi qualunque, bisogna situare i loro vertici al centro di due sfere uguali; e questi angoli solidi saranno fra loro come i poligoni sferici intercetti frai loro piani o facce.

L'angolo al vertice della piramide tri-rettangola è formato da tre piani perpendicolari fra loro. Quest'angolo, che si può chiamare *angolo solido retto*, è adattatissimo per servire d'unità di misura agli altri angoli solidi. Posto ciò, il medesimo numero, che dà l'area del poligono sferico, darà la misura dell'angolo solido corrispondente. Per esempio, se l'area del poligono sferico è $\frac{3}{4}$,

vale a dire, se è uguale a $\frac{3}{4}$ del triangolo tri-rettangolo, l'angolo solido corrispondente sarà pure $\frac{3}{4}$ dell'angolo solido retto.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA

La superficie d'un poligono sferico ha per misura la somma dei suoi angoli meno il prodotto di due angoli retti per il numero dei lati del poligono meno due.

Fig. 240. Da un medesimo vertice A siano condotte a tutti gli altri vertici le diagonali AC, AD; il poligono ABCDE sarà diviso in tanti triangoli meno due quanti lati egli contiene. Ma la superficie di ciascun triangolo ha per misura la somma dei suoi angoli meno due angoli retti; ed è chiaro che la somma di tutti gli angoli dei triangoli è uguale alla somma degli angoli del poligono. Dunque la superficie del poligono è uguale alla somma dei suoi angoli meno tante volte due angoli retti quanti sono i suoi lati men due.

Scolio. Sia s la somma degli angoli d'un poligono sferico, n il numero dei suoi lati; essendo supposto l'angolo retto per unità, la superficie del poligono avrà per misura $s-2(n-2)$, o $s-2n+4$.

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA

Sia S *il numero degli angoli solidi d'un poliedro,* H *il numero delle sue facce;* A *il numero delle sue costole o spigoli; dico che sarà sempre* $S+H=A+2$.

Prendete dentro il poliedro, un punto da cui condurrete delle linee rette ai vertici di tutti gli angoli solidi; immaginate dipoi che dal medesimo punto, come centro, si descriva una superficie sferica, che sia incontrata da tutte queste linee in altrettanti punti; congiungete questi punti con archi di circoli grandi, in modo che si formino sulla superficie della sfera i poligoni corrispondenti, ed uguali in numero alle facce del poliedro. Sia ABCDE uno di questi poligoni, e sia n il numero dei suoi lati; la sua superficie sarà $s-2n+4$, essendo s la somma degli angoli A, B, C, D, E. Se si valuti similmente la superficie di ciascuno degli altri poligoni sferici, e si sommino tutti insieme, se ne conchiuderà che la loro somma, o la superficie della sfera rappresentata da 8, è uguale alla somma di tutti gli angoli dei poligoni meno due volte il numero dei loro lati, più 4 preso tante volte quante sono le facce. Ora, siccome tutti gli angoli formati intorno ad un medesimo punto A equivalgono a quattro angoli retti, la somma di tutti gli angoli dei poligoni è uguale a 4 preso tante volte quanti angoli solidi vi sono; è dunque uguale a 4S. Dipiù il doppio del numero dei lati AB, BC, CD, ec. è uguale al quadruplo del numero delle costole, o $=4A$; giacchè la medesima costola serve di lato a due facce. Dunque si avrà $8=4S-4A+4H$; e, prendendo la quarta parte di ciascun membro, $2=S-A+H$; dunque $S+H=A+2$. Fig. 240.

Corollario. Segue da ciò che *la somma degli angoli piani, che formano gli angoli solidi d'un poliedro è uguale a tante volte quattro angoli retti quante unità sono in* S—2, *essendo* S *il numero degli angoli solidi del poliedro.*

Poichè, se si considera una faccia, il cui numero di lati sia n, la somma degli angoli di questa faccia sarà $2n$—4 angoli retti *. Ma la somma di tutti i $2n$, o il doppio del numero dei lati di tutte le facce, =4A, e 4 preso tante volte quante sono le facce =4H; dunque la somma degli angoli di tutte le facce =4A—4H. Ora, per il teorema, che abbiam già dimostrato, si ha A—H=S—2, e per conseguenza 4A—4H=4(S—2). Dunque *la somma degli angoli piani* ec.

* 21, 1.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA

Fig 241 a e 241. b *Di tutti i triangoli sferici formati con due lati dati* CB, CA, *ed un terzo a piacimento, il più grande* ABC *è quello, nel quale l'angolo* C, *compreso tra i lati dati, è uguale alla somma degli altri due angoli* A, e B.

Prolungate i due lati AC, AB fino al loro incontro in D; avrete un triangolo sferico BCD, nel quale l'angolo DBC sarà parimente eguale alla somma degli altri due BDC, BCD; perchè BCD+BCA essendo eguale a due angoli retti, come pure CBA+CBD, si ha BCD+BCA=CBA+CBD; aggiungendo da una parte e dall'altra BDC=BAC, si

avrà BCD+BCA+BDC=CBA+CBD+BAC. Ora, per ipotesi, BCA=CBA+BAC; dunque CBD=BCD+BDC.

Conducete adesso BI, che faccia l'angolo CBI=BCD, e per conseguenza IBD=BDC; i due triangoli IBC, IBD saranno isosceli, e si avrà IC=IB=ID; dunque il punto I, mezzo di BC, è ad egual distanza dai tre punti B, C, D: per una simil ragione, il punto O, mezzo di AB, sarà egualmente distante dai tre punti A, B, C.

Sia ora CA′=CA, e l'angolo BCA′>BCA; se si tiri AB, e si prolunghino gli archi A′C, A′B fino al loro incontro in D′, l'arco D′CA′ sarà una mezza-circonferenza, come pure DCA; dunque, poichè si ha CA′=CA, si avrà ancora CD′=CD. Ma nel triangolo CID′ si ha CI+ID′>CD′; dunque ID′>CD—CI, o ID′>ID. Fig. 241

Nel triangolo isoscele CIB dividete l'angolo del vertice I in due parti eguali con l'arco EIF, che sarà perpendicolare sopra il mezzo di BC. Se si prende un punto L tra I, ed E, la distanza BL, eguale a LC, sarà minor di BI; perchè si può dimostrare, come nella Proposizione IX. Lib. I., che si ha BL+LC<BI+IC; dunque, prendendo le metà da una parte e dall'altra, si avrà BL<BI. Ma nel triangolo D′LC si ha D′L>D′C—CL, ed a maggior ragione D′L>DC—CI, o D′L>DI, o D′L>BI, o D′L>BL. Dunque, se si cerca sopra l'arco EIF un punto egualmente distante dai tre punti B, C, D, questo punto non potrebbe trovarsi

che sul prolungamento di EI verso F. Sia I' il punto cercato, di modo che s'abbia D'I'= BI'=CI'; i triangoli I'CB, I'CD', I'BD' essendo isosceli, si avranno gli angoli eguali, cioè, I'BC=I'CB, I'BD'=I'D'B, I'CD'= I'D'C. Ma gli angoli D'BC+CBA' equivalgono a due angoli retti, come ancora D'CB+ BCA'; dunque

$$D'BI'+I'BC+CBA'=2,$$
$$BCI'+I'CD'+BCA'=2.$$

Aggiungendo le due somme, e osservando che si ha I'BC=BCI', e D'BI'—I'CD'= BD'I'—I'D'C=CD'B=CA'B, si avrà

$$2I'BC+CA'B+CBA'+BCA'=4.$$

Dunque CA'B+CBA'+BCA'—2 (misura dell'area del triangolo A'BC) =2—2 *angoli* I'BC, di modo che si ha *area* A'BC=2—2 *angolo* I'BC; similmente nel triangolo ABC si avrebbe ABC=2—2 angolo IBC. Ora si è dimostrato che l'angolo I'BC è maggiore di IBC; dunque l'area A'BC è minore di ABC.

F. 241. *a.* La medesima dimostrazione e conclusione avrebbero luogo se, prendendo sempre l'arco CA'=CA, si facesse l'angolo BCA'<BCA; dunque ABC è il triangolo il più grande tra tutti quelli, che hanno due lati dati, ed il terzo a piacere.

Fig. 241. *Scolio I.* Il triangolo ABC, più grande tra tutti quelli, che hanno due lati dati CA, CB, può essere iscritto in un mezzo-circolo, di cui la corda del terzo lato AB sarà il diametro; perchè, O essendo il mezzo di AB, si è veduto che le distanze OC, OB sono eguali; dunque la circonferenza del piccol cir-

colo descritto dal punto O, come polo, e con l'intervallo OB, passerà pe' i tre punti A, B, C. Di più la linea retta BA è un diametro di questo piccol circolo; poichè il centro, che dee trovarsi ad un tempo nel piano di questo piccol circolo, e nel piano dell'arco di circolo grande * BCA, si troverà necessariamente nell'intersezione di questi due piani, ch'è la retta BA; e così BA sarà un diametro. * Pr. 1. Cor 4.

II. Nel triangolo ABC l'angolo C essendo eguale alla somma degli altri due A, e B, ne segue che la somma dei tre angoli è eguale al doppio dell'angolo C. Ma questa somma è sempre maggiore di due angoli retti *; dunque l'angolo C è maggiore d'un retto. * 19.

III. Se si prolungano i lati CB, AC finchè s'incontrino in E, il triangolo BAE sarà uguale alla quarta parte della superficie della sfera. Poichè l'angolo E=C=ABC+CAB; dunque i tre angoli del triangolo BAE equivalgono ai quattro ABC, ABE, CAB, BAE, la di cui somma è 4 angoli retti. Dunque la superficie del triangolo BAE*=4—2=2, che è la quarta parte della superficie della sfera. * 24.

IV. Non vi sarebbe luogo a *massimo* se la somma dei due lati dati AC, BC fosse uguale, o maggiore d'una mezza-circonferenza d'un gran circolo; poichè, siccome il triangolo ABC debb'essere iscritto in un mezzocircolo della sfera, bisogna che la somma dei due lati CB, AC sia minore della mezza-

* 3. circonferenza BCA *, e per conseguente minore della mezza-circonferenza d'un gran circolo.

La ragione, per cui non vi è *massimo* quando la somma dei due lati dati è maggiore della mezza-circonferenza d'un gran circolo, si è perchè allora il triangolo va crescendo a misura che l'angolo compreso fra' lati dati è più grande. Finalmente, quando quest' angolo sarà uguale a due retti, i tre lati saranno in uno stesso piano, e formeranno una circonferenza intera: il triangolo sferico diventerà dunque uguale alla mezza-sfera, ma cesserà allora d'esser triangolo.

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA

Di tutti i triangoli sferici formati con un lato dato, ed un perimetro dato, il più grande è quello, in cui i due lati non determinati sono uguali.

Fig. 242. Sia AB il lato dato comune ai due triangoli ACB, ADB, e sia AC+CB=AD+DB; dico che il triangolo isoscele ACB, nel quale AC=CB, è maggiore del non-isoscele ADB.

Poichè, avendo questi triangoli la parte comune AOB, basta di far vedere che il triangolo BOD è minore di AOC. L'angolo CBA uguale a CAB è maggiore di OAB,
* 16. onde il lato AO è maggiore di OB *; prendete OI=OB; fate OK=OD; e tirate KI:
* 21. il triangolo OKI sarà uguale a DOB *. Se si nega adesso che il triangolo DOB, o il

suo uguale KOI sia minore di OAC, bisognerà che sia uguale, o maggiore; in ambedue i casi, siccome il punto I è fra i punti A e O, bisognerà che il punto K sia sopra OC prolungato; altrimenti il triangolo OKI sarebbe contenuto nel triangolo CAO, e perciò sarebbe minore. Posto ciò, essendo CA il più corto cammino da C ad A, si ha CK+KI+IA>CA. Ma CK=OD-CO, AI=AO-OB, KI=BD; dunque OD-CO+AO-OB+BD>CA, e riducendo AD—CB+BD>CA, o AD+BD>AC+CB. Ora questa disuguaglianza è contraria alla supposizione AD+BD=AC+CB; dunque il punto K non può cadere sul prolungamento di OC; dunque cade fra O e C, e per conseguenza il triangolo KOI, o il suo uguale ODB è minore di ACO: dunque il triangolo isoscele ACB è maggiore del non-isoscele ADB della medesima base, e dello stesso perimetro.

Scolio. Queste due ultime proposizioni sono analoghe alle Proposizioni I. e III. dell'Appendice al Libro IV; onde si posson dedurre per rapporto ai poligoni sferici le conseguenze, che han luogo pe' i poligoni rettilinei. Ecco le principali.

1.° *Di tutti i poligoni sferici isoperimetri, e d'un medesimo numero di lati, il maggiore è un poligono equilatero.*

2.° *Di tutti i poligoni sferici formati con lati dati, e un ultimo a piacimento, il più grande è quello, che si può iscrivere in un mezzo-circolo, di cui la corda del lato non*

determinato è il diametro. Perchè sia possibile la soluzione bisogna che la somma dei lati dati sia minore d'una mezza-circonferenza di circolo grande.

3.° *Il maggiore dei poligoni sferici formati con lati dati è quello, che si può iscrivere in un circolo della sfera.*

4.° *Il maggiore dei poligoni sferici, che hanno lo stesso perimetro, e il medesimo numero di lati, è quello, che ha i suoi angoli eguali, e parimente i suoi lati eguali.*

Tutte le Proposizioni sul *massimo*, riguardanti i poligoni sferici, si applicano agli angoli solidi, di cui tali poligoni son la misura.

APPENDICE AI LIBRI VI. E VII.

I POLIÈDRI REGOLARI

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA

Non posson esservi che cinque poliedri regolari.

Poichè si son definiti per *poliedri regolari* quelli, di cui tutte le facce sono poligoni regolari uguali, e di cui tutti gli angoli solidi sono uguali fra loro. Queste condizioni non possono aver luogo che in un piccol numero di casi.

1.° Se le facce son triangoli equilateri, si può formar ciascun angolo solido del poliedro con tre angoli di questi triangoli, o con quattro, o con cinque. Quindi nascono tre corpi regolari, che sono il *tetraedro*, l'*ottaedro*, e l'*icosaedro*. Non se ne può formare di più con dei triangoli equilateri, poichè sei angoli di questi triangoli equivalgono a quattro angoli retti, e non posson formare un angolo solido *. * 21, 5.

2.° Se le facce sono quadrati, si posson riunire i loro angoli a tre a tre, e ne risulta l'*essaedro*, o *cubo*.

Quattro angoli di quadrato equivalgono a quattro angoli retti, e non posson formar un angolo solido.

3.° Finalmente, se le facce sono pentagoni regolari, si potran pure riunire i loro angoli a tre a tre, e ne risulterà il *dodecaedro* regolare.

Non si può andar più oltre; poichè tre angoli d'esagono regolare equivalgono a quattre angoli retti, e tre angoli d'ettagono sono ancor più.

Dunque non posson esservi che cinque poliedri regolari; tre formati con dei triangoli equilateri, uno con dei quadrati, ed uno con dei pentagoni.

Scolio. Si proverà nella Proposizione seguente che questi cinque poliedri esistono realmente, e che se ne possono determinare tutte le dimensioni quando si conosca una delle lor facce.

PROPOSIZIONE II.

PROBLEMA

Essendo data una faccia d'uno dei poliedri regolari, o soltanto il suo lato, descrivere il poliedro.

Questo problema ne presenta cinque, che risolveremo un dopo l'altro.

Costruzione del Tetraedro.

Fig. 243. Sia ABC il triangolo equilatero, che debb' essere una delle facce del tetraedro: dal punto O, centro di questo triangolo, alzate OS perpendicolare al piano ABC; terminate questa perpendicolare al punto S, talmente che AS=AB; tirate SB, SC; e la piramide SABC sarà il tetraedro richiesto.

Poichè, a cagione delle distanze uguali OA, OB, OC, le oblique SA, SB, SC si allontanano ugualmente dalla perpendicolare SO, e perciò sono uguali. Una di esse SA=AB; dunque le quattro facce della piramide SABC sono triangoli uguali al triangolo dato ABC. D'altronde gli angoli solidi di questa piramide sono uguali fra loro, poichè ciascuno di essi è formato con tre angoli piani uguali. Dunque questa piramide è un tetraedro regolare.

Costruzione dell'essaedro.

Fig. 244. Sia ABCD un quadrato dato: sopra la base ABCD costruite un prisma retto, la cui altezza AE sia uguale al lato AB. È

chiaro che le facce di questo prisma saranno quadrati uguali, e che i suoi angoli solidi sono uguali fra loro, giacchè vengon formati con tre angoli retti; dunque questo prisma è un essaedro regolare, o cubo.

Costruzione dell'ottaedro.

Sia AMB un triangolo equilatero dato: sul lato AB descrivete il quadrato ABCD, dal punto O, centro di questo quadrato, alzate sul suo piano la perpendicolare TS, terminata dalle due parti in T, e in S talmente che OT=OS=AO; tirate dipoi SA, SB, TA, ec.: avrete un solido SABCDT composto di due piramidi quadrangolari SABCD, TABCD riunite per la loro base comune ABCD: questo solido sarà l'*ottaedro regolare* cercato. Fig. 245.

Infatti il triangolo AOS è rettangolo in O, come pure il triangolo AOD; i lati AO, OS, OD sono uguali; dunque questi triangoli sono uguali, e si ha AS=AD. Si dimostrerà parimente che tutti gli altri triangoli rettangoli AOT, BOS, COT, ec. sono uguali al triangolo AOD; dunque tutti i lati AB, AS, AT, ec. sono uguali fra loro, e per conseguenza il solido SABCDT è compreso da otto triangoli uguali al triangolo equilatero dato ABM. Dico di più che gli angoli solidi del poliedro sono uguali fra loro, per esempio, l'angolo S è uguale all'angolo B.

Poichè è manifesto che il triangolo SAC è uguale al triangolo DAC, e che perciò l'angolo ASC è retto: dunque la figura SATC

è un quadrato uguale al quadrato ABCD. Ma, se si paragona la piramide BASCT colla piramide SABCD, la base ASCT della prima può situarsi sulla base ABCD della seconda; allora, essendo il punto O un centro comune, l'altezza OB della prima si confonderà coll'altezza OS della seconda, e le due piramidi si confonderanno in una sola; dunque l'angolo solido S è uguale all'angolo solido B; dunque il solido SABCDT è un *ottaedro regolare*.

Scolio. Se tre rette uguali AC, BD, ST sono perpendicolari fra loro, e si tagliano nel loro mezzo, le estremità di queste rette saranno i vertici d'un *ottaedro regolare*.

Costruzione del dodecaedro.

Fig. 46. Sia ABCDE un pentagono regolare dato; siano ABP, CBP due angoli piani uguali all'angolo ABC; con questi angoli piani formate l'angolo solido B, e determinate per la Proposizione XXIV. del Libro V. l'inclinazione scambievole di due di questi piani; inclinazione, ch'io chiamo K. Formate similmente ai punti C, D, E, A degli angoli solidi uguali all'angolo solido B, e situati nella stessa maniera; il piano CBP sarà lo stesso che il piano BCG, poichè sono inclinati l'uno e l'altro della medesima quantità K sul piano ABCD. Si può dunque nel piano PBCG descrivere il pentagono BCGFP uguale al pentagono ABCDE. Se si fa lo stesso in ciascuno degli altri piani CDI, DEL

ec., si avrà una superficie convessa PFGH ec. composta di sei pentagoni regolari uguali, ed inclinati ciascuno sul suo adjacente della quantità medesima K. Sia *pfgh* ec. una seconda superficie uguale a PFGH ec.; dico che queste due superficie posson esser riunite in tal modo da formare una sola superficie convessa continuata. Infatti l'angolo *opf*, per esempio, può unirsi ai due angoli OPB, BPF per fare un angolo solido P uguale all'angolo B; ed in questa riunione non si cambierà niente l'inclinazione dei piani BPF, BPO, giacchè quest'inclinazione è qual'appunto bisogna per la formazione dell'angolo solido. Ma, nel tempo stesso che si forma l'angolo solido P, il lato *pf* si applicherà sul suo uguale PF, e nel punto F si troveranno riuniti tre angoli piani PFG, *pfe*, *efg*, che formeranno un angolo solido uguale a ciascuno degli angoli già formati: questa riunione farassi senza cambiar niente lo stato dell'angolo P, nè quello della superficie *efgh* ec., poichè i piani PFG, *efp* digià riuniti in P hanno fra loro l'inclinazion convenevole K, come pure i piani *efg*, *efp*. Continuando così di mano in mano si vede chiaro che le due superficie si aggiusteranno scambievolmente una coll'altra, onde formare una sola superficie continuata, e rientrante in se stessa. Questa superficie sarà quella d'un *dodecaedro regolare*, poichè è composta di dodici pentagoni regolari uguali, e tutti i suoi angoli solidi sono uguali fra loro.

Costruzione dell' icosaedro.

Fig. 247. Sia ABC una delle sue facce; bisogna prima formare un angolo solido con cinque piani uguali al piano ABC, ed ugualmente inclinati ciascuno sul suo adjacente. Perciò sul lato B′C′ ugnale a BC fate il pentagono regolare B′C′H′I′D′; dal centro di questo pentagono alzate sul suo piano una perpendicolare, che terminerete in A′ di modo che B′A′=B′C′; tirate A′C′, A′H′, A′I′, A′D′; e l'angolo solido A′ formato dai cinque piani B′A′C′, C′A′H′, ec. sarà l'angolo solido domandato. Poichè le oblique A′B′, A′C′ ec. son uguali, ed una di esse A′B′ è uguale al lato B′C′; dunque tutti i triangoli B′A′C′, C′A′H′, ec. sono uguali fra loro, ed al triangolo dato ABC.

È d' altronde patente che i piani B′A′C′, C′A′H′, ec. sono ugualmente inclinati ciascuno sul suo adjacente, poichè gli angoli solidi B′, C′, ec. sono uguali fra loro, a motivo che ciascuno di essi è formato con due angoli di triangolo equilatero, ed un di pentagono regolare. Chiamiamo K l'inclinazion dei due piani ove sono gli angoli uguali; inclinazione, che si può determinare mediante la Proposizione XXIV. del Lib. V; l'angolo K sarà nel tempo stesso l'inclinazione di ciascuno dei piani, che compongon l'angolo solido A′, sul suo adjacente.

Posto ciò, se si fanno ai punti, A, B, C degli angoli solidi, uguali ognuno all' angolo

A′, si avrà una superficie convessa DEFG ec. composta di dieci triangoli equilateri, di cui ciascuno sarà inclinato sul suo adjacente della quantità K, e gli angoli D, E, F, ec. del di lei contorno riuniranno alternativamente tre, e due angoli del triangolo equilatero. Immaginate una seconda superficie uguale alla superficie DEFG ec.; queste due superficie potranno adattarsi scambievolmente, unendo ciascun angolo triplo dell' una con un angolo doppio dell' altra; e, siccome i piani di questi angoli hanno già fra loro l' inclinazione K necessaria per formare un angolo solido quintuplo uguale all' angolo A, non si cambierà niente in questa riunione lo stato di ciascuna superficie in particolare, e le due insieme formeranno una sola superficie continua composta di venti triangoli equilateri. Questa superficie sarà quella dell' *icosaedro regolare*, poichè d' altronde tutti gli angoli solidi sono uguali fra loro.

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA

Trovare l' inclinazione di due facce adjacenti d' un polièdro regolare.

Questa inclinazione deducesi immediatamente dalla costruzione già data dei cinque polièdri regolari; al che bisogna aggiungere la Proposizione XXIV. del Libro V., in virtù della quale essendo dati i tre angoli piani, che formano un angolo solido, si determina l' angolo, che due di questi piani fanno fra loro.

Fig. 243. *Nel tetraedro*. Ciascun angolo solido è formato da tre angoli di triangolo equilatero; bisogna dunque cercare col problema citato l'angolo, che due di questi piani fanno fra loro; quest'angolo sarà l'inclinazione di due facce adjacenti del tetraedro.

Fig. 244. *Nell'essaedro*. L'angolo di due facce adjacenti è un angolo retto.

Fig. 245. *Nell'ottaedro*. Formate un angolo solido con due angoli di triangolo equilatero, ed un angolo retto; l'inclinazion dei due piani, ove sono gli angoli dei triangoli, sarà quella di due facce adjacenti dell'ottaedro.

Fig. 246. *Nel dodecaedro*. Ogni angolo solido è formato con tre angoli di pentagono regolare; laonde l'inclinazione dei piani di due di tali angoli sarà quella di due facce adjacenti del dodecadro.

Fig. 247. *Nell'icosaedro*. Formate un angolo solido con due angoli di triangolo equilatero, ed un angolo di pentagono regolare; l'inclinazion dei due piani, ove sono gli angoli dei triangoli, sarà quella di due facce adjacenti dell'icosaedro.

PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA

Essendo dato il lato d'un poliedro regolare, trovare il raggio della sfera iscritta, e quello della sfera circoscritta ad un tal poliedro.

Bisogna prima dimostrare che ogni poliè-

dro regolare può essere iscritto, e circoscritto a una sfera.

Sia AB il lato comune a due facce adjacenti; siano C ed E i centri di queste due facce, e CD, ED le perpendicolari abbassate da questi centri sul lato comune AB, le quali cadranno nel punto D, mezzo di questo lato. Le due perpendicolari CD, DE fanno fra loro un angolo cognito, ch'è uguale all'inclinazione di due facce adjacenti determinata dal precedente problema. Ora, se nel piano CDE, perpendicolare ad AB, si conducano sopra CD, ed ED le perpendicolari indefinite CO, ed EO, che s'incontrino in O, dico che il punto O sarà il centro della sfera iscritta, e quello altresì della sfera circoscritta, essendo OC il raggio della prima, e OA quello della seconda. Fig. 248.

Infatti, poichè gli apotèmi CD, DE sono uguali, e l'ipotenusa DO comune, il triangolo rettangolo CDO è uguale al triangolo rettangolo ODE, * e la perpendicolare OC è uguale alla perpendicolare OE. Ma essendo AB perpendicolare al piano CDE, il piano ABC è perpendicolare a CDE *, o CDE ad ABC: d'altronde CO nel piano CDE è perpendicolare a CD, intersezione comune dei piani CDE, ABC; dunque CO è perpendicolare al piano ABC. Per la medesima ragione, EO è perpendicolare al piano ABE; dunque le due perpendicolari CO, EO, condotte ai piani di due facce adjacenti dai centri di queste facce, s'incontrano in

* 18, 1.

* 17, 5.

* * 18, 5.

uno stesso punto O, e sono uguali. Supponiamo adesso che ABC, ed ABE rappresentino due altre facce adjacenti qualunque; l'apotèma CD resterà sempre della grandezza medesima, come pure l'angolo CDO metà di CDE; dunque il triangolo rettangolo CDO, ed il suo lato CO saranno uguali per rapporto a tutte le facce del poliedro. Dunque, se dal punto O, come centro, e col raggio OC, si descriva una sfera, essa toccherà tutte le facce del poliedro nei loro centri (poichè i piani ABC, ABE saranno perpendicolari all'estremità d'un raggio), e la sfera sarà iscritta nel poliedro, o il poliedro circoscritto alla sfera.

Tirate OA, OB; a cagione di CA=CB, le due oblique OA, OB, allontanandosi ugualmente dalla perpendicolare, saranno uguali; sarà lo stesso di due altre linee rette qualunque condotte dal centro O alle estremità d'un medesimo lato: dunque tutte queste linee sono uguali fra loro. Dunque, se dal punto O, come centro, e col raggio OA, si descriva una superficie sferica, essa passerà per i vertici di tutti gli angoli solidi del poliedro, e la sfera sarà circoscritta al poliedro, o il poliedro iscritto nella medesima sfera.

Posto ciò, la soluzione del problema proposto non ha più difficoltà veruna, e può eseguirsi così:

Fig. 249. Essendo dato il lato d'una faccia del poliedro, descrivete questa faccia, e sia CD il suo apotèma. Cercate per il problema pre-

cedente l'inclinazione di due facce adjacenti del polièdro, e fate l'angolo CDE uguale a quest'inclinazione trovata. Prendete DE uguale a CD; conducete CO, ed EO perpendicolari a CD, ed ED; queste due perpendicolari s'incontreranno in un punto O; e CO sarà il raggio della sfera iscritta nel polièdro.

Sul prolungamento di DC prendete CA uguale al raggio del circolo circoscritto a una faccia del polièdro; ed OA sarà il raggio della sfera circoscritta a questo polièdro medesimo.

Poichè i triangoli rettangoli CDO, CAO della Figura 249. sono uguali ai triangoli dello stesso nome nella Figura 248. Quindi è che mentre CD, e CA sono i raggi dei circoli iscritto, e circoscritto a una faccia del polièdro, OC, ed OA sono i raggi delle sfere iscritta, e circoscritta al medesimo polièdro.

Scolio. Si posson dedurre dalle precedenti Proposizioni diverse conseguenze immediate.

1.° Ogni polièdro regolare può esser diviso in tante piramidi regolari, quante facce ha il polièdro: il vertice comune di queste piramidi sarà il centro del polièdro, ch'è nel tempo stesso centro delle due sfere iscritta, e circoscritta.

2.° La solidità d'un polièdro regolare è uguale alla sua superficie moltiplicata per la terza parte del raggio della sfera iscritta.

3.° Due polièdri regolari del medesimo nome sono due solidi simili, e le lor dimen-

sioni omologhe sono proporzionali; dunque i raggi delle sfere iscritte, o circoscritte stanno fra loro come i lati di questi poliedri.

4.° Se s'iscriva un poliedro regolare in una sfera, i piani condotti dal centro per i differenti lati divideranno la superficie della sfera in tanti poligoni uguali, e simili, quante sono le facce del poliedro.

LIBRO OTTAVO

I TRE CORPI ROTONDI

DEFINIZIONI

1. Si chiama *cilindro* il solido prodotto dalla rivoluzione d'un rettangolo ABCD, che s'immagina rivolgersi intorno il lato immobile AB. Fig. 250.

In tal movimento i lati BC, AD, restando sempre perpendicolari ad AB, descrivono dei piani circolari uguali DHP, CGQ, che si chiaman le *basi del cilindro*, ed il lato CD ne descrive la *superficie convessa*.

La linea immobile AB si chiama *l'asse del cilindro*.

Ogni sezione KLM fatta nel cilindro perpendicolarmente all'*asse* è un circolo uguale a ciascuna delle due basi. Poichè, mentre il rettangolo ABCD gira intorno ad AB, la linea retta IK perpendicolare ad AB descrive un pian circolare uguale alla base, e questo piano non è altro che la sezione fatta perpendicolarmente all'*asse* nel punto I.

Ogni sezione PQGH fatta per l'*asse* è un

rettangolo, doppio del rettangolo generatore ABCD

Fig. 251. 2. Si chiama *cono* il solido prodotto dalla rivoluzione del triangolo rettangolo SAB, che s'immagina girare intorno al lato immobile SA.

In questo movimento il lato AB descrive un' piano circolare BDCE, che si chiama *base del cono;* e l' ipotenusa SB ne descrive *la superficie convessa*.

Il punto S si chiama *il vertice del cono*, SA *l' asse*, o *l' altezza*, e SB *il lato*, o *apotèma*.

Ogni sezione HKFI fatta perpendicolarmente all' *asse* è un circolo; ogni sezione SDE fatta per l' *asse* è un triangolo isoscele, doppio del triangolo generatore SAB.

3. Se dal cono SCDB si toglie, mediante una sezione paralella alla base, il cono SFKH, il solido restante CBHF si chiama *cono troncato*, o *tronco di cono*. Si può supporre che sia descritto dalla rivoluzione del trapezio ABHG, i cui angoli A, e G sono retti, intorno al lato AG. La linea immobile AG si chiama *asse*, o *altezza del tronco*, i circoli BDC, HKF ne sono *le basi*, e BH n' è *il lato*.

4. Due cilindri, o due coni son *simili* quando i lor assi stanno fra loro come i diametri delle lor basi.

Fig. 252. 5. Se nel circolo ACD, che serve di base a un cilindro, s' iscrive un poligono ABCDE, e sulla base ABCDE s' inalza un prisma retto

uguale in altezza al cilindro, il prisma si dice *iscritto nel cilindro*, o il cilindro *circoscritto al prisma*.

È chiaro che li spigoli o costole AF, BG, CH, ec. del prisma, essendo perpendicolari al pian della base, son compresi nella superficie convessa del cilindro. Dunque il prisma, e il cilindro si toccano lungo di queste costole.

6. Parimente, se ABCD è un poligono circoscritto alla base d'un cilindro, e sulla base ABCD si costruisce un prisma retto uguale in altezza allo stesso cilindro, il prisma si chiama *circoscritto al cilindro*, o il cilindro *iscritto nel prisma*. Fig. 253.

Siano M, N, ec. i punti di contatto dei lati AB, BC ec., e siano alzate dai punti M, N, ec. le perpendicolari MX, NY ec. al pian della base; è chiaro che queste perpendicolari saranno a un tempo stesso nella superficie del cilindro, ed in quella del prisma circoscritto; dunque esse saranno le linee lor di contatto.

Nota. Il cilindro, il cono, e la sfera sono i *tre corpi rotondi*, di cui si tratta negli *Elementi*.

LEMMI PRELIMINARI SULLE SUPERFICIE

I.

Una superficie piana OABCD *è minore di ogni altra superficie* PABCD *terminata dal medesimo contorno* ABCD. Fig. 254.

Questa proposizione è abbastanza evidente per esser posta nel numero degli assiomi; poichè si potrebbe supporre che il piano sia tra le superficie ciò, che la linea retta è fra le altre linee. La linea retta è la più corta fra due punti dati; parimente il piano è la superficie più piccola fra tutte quelle, che hanno un istesso contorno. Nonostante, siccome conviene ridur gli assiomi al più piccol numero possibile, ecco un ragionamento, che non lascerà verun dubbio su questa Proposizione.

Essendo la superficie un' estensione in lunghezza, e larghezza, non si può concepire che una superficie sia maggiore d' un' altra salvo che le dimensioni della prima non superino in qualche senso quelle della seconda; e se accade che le dimensioni d' una superficie siano in ogni senso minori delle dimensioni d' un' altra superficie, è chiaro che la prima superficie sarà la minor delle due. Ora in qualunque senso si faccia passare il piano BPD, che taglierà la superficie piana in BD, e l' altra superficie in BPD, la linea retta BD sarà sempre minore di BPD. Dunque la superficie piana OABCD è minore della superficie circondante PABCD.

II.

Fig. 255. *Ogni superficie convessa* OABCD *è minore d' un' altra superficie qualunque, che circondasse la prima appoggiandosi sul medesimo contorno* ABCD.

Ripeteremo quì che intendiamo per *superficie convessa* una superficie, che non può esser incontrata da una linea retta in più di due punti. E per altro possibile che una linea retta si applichi esattamente in un certo senso sopra una superficie convessa; se ne vedono degli esempj nelle superficie del cono, e del cilindro. Osserveremo pure che la denominazione di *superficie convessa* non è ristretta alle sole superficie curve; comprende le *superficie polièdre*, o composte di più piani, ed anche le superficie in parte curve, in parte polièdre.

Ciò posto, se la superficie OABCD non è minore di tutte quelle, che la circondano, sia tra queste PABCD la superficie più piccola, che sarà al più uguale ad OABCD. Per un punto qualunque O fate passare un piano, che tocchi la superficie OABCD senza tagliarla; questo piano incontrerà la superficie PABCD; e la parte, che ne reciderà, sarà maggiore del piano stesso terminato alla medesima superficie. Dunque conservando il resto della superficie PABCD, si potrebbe sostituire il piano alla parte recisa, e s'avrebbe una nuova superficie, che circonderebbe sempre la superficie OABCD, e sarebbe minore di PABCD.

Ma questa è la minore di tutte, per supposizione; dunque questa supposizione non può sussistere. Dunque la superficie convessa OABCD è minore d'ogni altra superficie,

che circondasse OABCD, e fosse terminata al medesimo contorno ABCD.

Scolio. Con un ragionamento interamente simile si proverà

Fig. 256. 1.° Che se una superficie convessa terminata da due contorni ABC, DEF è circondata da un'altra superficie qualunque terminata ai contorni medesimi, la superficie circondata sarà la minor d'esse due.

Fig. 257. 2.° Che se una superficie convessa AB è circondata per tutte le parti da un'altra superficie MN, o abbiano entrambe dei punti, linee, o piani comuni, o non abbiano verun punto comune, la superficie circondata sarà sempre minore della superficie circondante.

Poichè fra queste non può esservene alcuna, che sia un *minimo*, atteso che in qualunque supposizione si potrebbe sempre condurre il piano CD tangente alla superficie convessa, il qual piano sarebbe minore della superficie CMD; e però la superficie CND sarebbe minore di MN; il che è contrario all'ipotesi che MN sia un *minimo*. Dunque la superficie convessa AB è minore di tutte quelle, che la circondano.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA

La solidità d'un cilindro è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza

Fig. 258. Sia CA il raggio della base del cilindro dato, H la sua altezza; rappresentiamo con *sup.* CA la superficie del circolo; il di cui

raggio è CA; dico che la solidità del cilindro sarà *sup.* CA×H. Poichè, se *sup.* CA×H non è la misura del cilindro dato, questo prodotto sarà la misura d'un cilindro maggiore, o minore. E prima supponiamo che sia la misura d'un cilindro minore, per esempio, del cilindro, di cui CD è il raggio della base, e H l'altezza.

Circoscrivete al circolo, il cui raggio è CD, un poligono regolare GHIP, i lati del quale non incontrino la circonferenza, di cui CA è il raggio *: immaginate dipoi un prisma retto, che abbia per base il poligono GHIP, e per altezza H, il qual prisma sarà circoscritto al cilindro, il raggio della cui base è CD. Posto ciò, la solidità del prisma * è uguale alla sua base GHIP moltiplicata per l'altezza H; la base GHIP è minore del circolo, di cui CA è il raggio; dunque la solidità del prisma è minore di *sup.* CA×H. Ma *sup.* CA×H è, per supposizione, la solidità del cilindro iscritto nel prisma. Dunque il prisma sarebbe minor del cilindro. Ora, al contrario, il cilindro è minore del prisma, poichè v'è contenuto. Dunque è impossibile che *sup.* CA×H sia la misura del cilindro, la cui base ha per raggio CD, e la cui altezza è H, o, in termini più generali, *il prodotto della base d'un cilindro per la sua altezza non può misurare un cilindro minore*.

* 20, 4.

* 14, 6.

Dico in secondo luogo che questo stesso prodotto non può misurare un cilindro mag-

giore. Poichè, per non moltiplicar le Figure, sia CD il raggio della base del cilindro dato, e sia, s'è possibile, *sup.* CD×H la misura d'un cilindro maggiore, per esempio, del cilindro, la di cui base ha per raggio CA, e la cui altezza è sempre H.

Se si fa la stessa costruzione del primo caso, il prisma circoscritto al cilindro dato avrà per misura GHIP×H; l'area GHIP è maggiore di *sup.* CD; dunque la solidità del prisma, di cui si tratta, è maggiore di *sup.* CD×H: il prisma sarebbe dunque maggior del cilindro della medesima altezza, che ha per base *sup.* CA. Ora, all'opposto, il prisma è minor del cilindro, poichè v'è contenuto. Dunque *è impossibile che la base d'un cilindro moltiplicata per la sua altezza sia la misura d'un cilindro maggiore.*

Dunque finalmente la solidità d'un cilindro è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Corollario I. I cilindri della medesima altezza stanno fra loro come le basi, e i cilindri della medesima base stanno fra loro come le altezze.

Corollario II. I cilindri simili stanno come i cubi delle altezze, o come i cubi dei diametri delle basi. Poichè le basi stanno come i quadrati dei loro diametri, e, siccome i cilindri son simili, i diametri delle basi stanno come le altezze *: dunque le basi stanno come i quadrati delle altezze; dunque le basi moltiplicate per l'altezze, o i cilindri stessi stanno come i cubi delle altezze predette.

* Def. 4.

Scolio. Sia R il raggio della base d'un cilindro, H la sua altezza; la superficie della base sarà pR^{2*}, e la solidità del cilindro * 12, 4. sarà $pR^2 \times H$, o pR^2H.

PROPOSIZIONE II.

LEMMA

La superficie convessa d'un prisma retto è uguale al perimetro della sua base moltiplicato per la sua altezza.

Poichè questa superficie è uguale alla somma dei rettangoli AFGB, BGHC, CGID, ec., dei quali è composta; ora le altezze AF, BG, CH, ec. di questi rettangoli sono uguali all'altezza del prisma; le loro basi AB, BC, CD, ec. prese insieme fanno il perimetro della base del prisma. Dunque la somma di questi rettangoli, o la superficie convessa del prisma, è uguale al perimetro della sua base moltiplicato per la sua altezza. Fig. 252.

Corollario. Se due prismi retti hanno la medesima altezza, le superficie convesse di questi prismi staranno fra loro come i perimetri delle lor basi.

PROPOSIZIONE III.

LEMMA

La superficie convessa del cilindro è maggiore della superficie convessa d'ogni prisma iscritto, e minore della superficie convessa d'ogni prisma circoscritto.

Poichè la superficie convessa del cilindro e quella del prisma iscritto ABCDEF pos- Fig. 252.

sono essere considerate della medesima altezza, a motivo che ogni sezione fatta nell' uno, e nell'altro paralellamente ad AF è eguale ad AF; e se, per aver le larghezze di queste superficie, si tagliano con dei piani paralelli alla base, o perpendicolari alla costola, o spigolo AF, le sezioni saranno eguali, una alla circonferenza della base, l'altra al contorno del poligono ABCDE minore di questa circonferenza: dunque, poichè a lunghezza od altezza eguale la larghezza della superficie cilindrica è maggior di quella della superficie prismatica, ne segue che la prima superficie è maggiore della seconda.

Con un ragionamento interamente simile si proverà che la superficie convessa del cilindro è minore che quella d'ogni prisma circoscritto BCDKLH.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA

La superficie convessa d'un cilindro è uguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la sua altezza.

Fig. 258. Sia CA il raggio della base del cilindro dato, H la sua altezza; se si rappresenta con *circ.* CA la circonferenza, che ha per raggio CA, dico che *circ.* CA×H sarà la superficie convessa di questo cilindro. Poichè, se ciò si nega, bisognerà che *circ.* CA×H sia la superficie d'un cilindro maggiore, o minore; e prima supponiamo che sia la su-

perficie d'un cilindro minore, per esempio, del cilindro, la cui base ha per raggio CD, e la di cui altezza è H.

Circoscrivete al circolo, il cui raggio è CD, un poligono regolare GHIP, i di cui lati non incontrino la circonferenza, della quale CA è il raggio; immaginate dipoi un prisma retto, che abbia per altezza H, e per base il poligono GHIP. La superficie convessa di questo prisma sarà uguale al contorno del poligono GHIP moltiplicato per l'altezza H *; questo contorno è minore della circonferenza, il cui raggio è CA; dunque la superficie convessa del prisma è minore di *circ.* CA×H. Ma *circ.* CA×H è, per supposizione, la superficie convessa del cilindro, la di cui base ha per raggio CD, il qual cilindro è iscritto nel prisma; dunque la superficie convessa del prisma sarebbe minore di quella del cilindro iscritto. Ora, al contrario, dev'esser maggiore *; dunque la supposizione, da cui siamo partiti, è assurda. Dunque 1.° *la circonferenza della base d'un cilindro moltiplicata per la sua altezza non può misurare la superficie convessa d'un cilindro minore.* * 2. * 3.

Dico in secondo luogo che questo medesimo prodotto non può misurare la superficie d'un cilindro maggiore. Poichè, per non cambiar figura, sia CD il raggio della base del cilindro dato, e sia, s'è possibile, *circ.* CD×H la superficie convessa d'un cilindro, che colla medesima altezza avesse una base

maggiore, per esempio, il circolo, di cui il raggio è CA. Si farà la medesima costruzione come nella prima supposizione, e la superficie convessa del prisma sarà sempre uguale al contorno del poligono GHIP moltiplicato per l'altezza H. Ma questo contorno è maggiore di *circ.* CD; dunque la superficie del prisma sarebbe maggiore di *circ.* CD×H, che per supposizione è la superficie del cilindro della medesima altezza, la di cui base ha per raggio CA. Dunque la superficie del prisma sarebbe maggiore di quella di questo cilindro. Ma, quand'anche il prisma fosse iscritto nel cilindro, la sua superficie sarebbe minore di quella del cilindro *; molto più essa è minore quando il prisma non arriva fino al cilindro: dunque la seconda supposizione è assurda quanto la prima. Dunque 2.° *la circonferenza della base d'un cilindro moltiplicata per la sua altezza non può misurare la superficie d'un cilindro maggiore*.

* 3.

Dunque finalmente la superficie convessa d'un cilindro è uguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la sua altezza.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA

La solidità d'un cono è uguale al prodotto della sua base per la terza parte della sua altezza.

Fig. 259. Sia SO l'altezza del cono dato, AO il rag-

gio della base; se si rappresenta con *sup.* AO la superficie della base, io dico che la solidità di questo cono sarà eguale a *sup.* AO$\times\frac{1}{3}$SO.

Infatti supponiamo 1.° che *sup* AO$\times\frac{1}{3}$SO sia la solidità d' un cono maggiore, per esempio, del cono della stessa altezza SO, che abbia per raggio della sua base OB maggiore di AO.

Al circolo, di cui il raggio è AO, circoscrivete un poligono regolare MNPT, che non incontri la circonferenza, il di cui raggio è OB *; immaginate quindi una piramide, che abbia per base il poligono, e per vertice il punto S. La solidità di questa piramide * è uguale all' area del poligono MNPT moltiplicata per la terza parte dell' altezza SO Ma il poligono è maggiore del circolo iscritto rappresentato da *sup.* AO; dunque la piramide è maggiore di *sup.* AO$\times\frac{1}{3}$SO, che, per supposizione, è la misura del cono, di cui S è il vertice, e che ha OB per raggio della sua base. Ora, al contrario, la piramide è minore del cono, poichè v'è contenuta. Dunque 1.° è impossibile che la base d' un cono moltiplicata per la terza parte della sua altezza sia la misura d' un cono maggiore.

* 10, 4.

* 19, 6.

Dico 2.° che questo medesimo prodotto non può essere la misura d'un cono minore. Poichè, per non cambiar figura, sia OB il raggio della base del cono dato, e sia, s' è possibile, *sup.* OB$\times\frac{1}{3}$SO la solidità del cono,

che ha per altezza SO, e per base il circolo, di cui AO è il raggio. Si farà la medesima costruzione di sopra, e la piramide SMNPT, avrà per misura l'area MNPT moltiplicata per $\frac{1}{3}$SO. Ma l'area MNPT è minore di *sup.* OB; dunque la piramide avrebbe una misura minore di *sup.* OB$\times\frac{1}{3}$SO, e per conseguenza sarebbe minore del cono, che ha AO per raggio della base, e SO per altezza. Ora, al contrario, la piramide è maggiore del cono, poichè il cono v'è contenuto. Dunque 2.° è impossibile che la base d'un cono moltiplicata per la terza parte della sua altezza sia la misura d'un cono minore.

Dunque finalmente la solidità d'un cono è uguale al prodotto della sua base per la terza parte della sua altezza.

Corollario. Dunque un cono è la terza parte d'un cilindro della medesima base, e della medesima altezza; e da ciò segue

1.° Che i coni d'uguali altezze stanno fra loro come le basi;

2.° Che i coni di basi uguali stanno fra loro come le altezze;

3.° Che i coni simili stan come i cubi dei diametri delle lor basi, o come i cubi delle loro altezze.

Scolio. Sia R il raggio della base d'un cono, H la sua altezza; la solidità del cono sarà $p\mathrm{R}^2\times\frac{1}{3}\mathrm{H}$, o $\frac{1}{3}p\mathrm{R}^2\mathrm{H}$.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA

Il cono troncato ADEB, *di cui* OA, *e* PD *sono i raggi delle basi, e* PO *l'altezza, ha per misura* $\frac{p}{3}$OP($\overline{AO}^2$+$\overline{DP}^2$+AO×DP). Fig. 260

Sia TFGH una piramide triangolare della medesima altezza del cono SAB, e la di cui base FGH sia equivalente alla base del cono. Si può supporre che queste due basi sian situate sopra un medesimo piano; allora i vertici T, e S saranno a distanze uguali dal pian delle basi, ed il piano EPD prolungato farà nella piramide la sezione IKL. Ora io dico che questa sezione IKL è equivalente alla base DE. Poichè le basi AB, DE stanno fra loro come i quadrati dei raggi AO, DP *, o come i quadrati delle altezze SO, SP; i triangoli FGH, IKL stanno fra loro come i quadrati di queste medesime altezze *; dunque i circoli AB, DE stanno fra loro come i triangoli FGH, IKL. Ma, per supposizione, il triangolo FGH è equivalente al circolo AB; dunque il triangolo IKL è equivalente al circolo DE.

* 11, 4.

* 15, 6.

Ora la base AB moltiplicata per $\frac{1}{3}$ SO è la misura del cono SAB, e la base FGH moltiplicata per $\frac{1}{3}$SO la è della piramide TFGH; dunque, a motivo delle basi equivalenti, la solidità della piramide è equivalente a quella del cono. Per una simil ragione, la piramide TIKL è equivalente al cono SDE; dunque

il tronco di cono ADEB è equivalente al tronco di piramide FGHIKL. Ma la base FGH, equivalente al circolo, il di cui raggio è AO, ha per misura $p \times \overline{AO}^2$; parimente la base IKL $= p \times \overline{DP}^2$; e la media proporzionale fra $p \times \overline{AO}^2$, e $p \times \overline{DP}^2$ è $p \times AO \times DP$. Dunque la solidità del tronco di piramide, o sia quella del tronco di cono, ha per misura $\frac{1}{3}OP \times (p \times \overline{AO}^2 + p \times \overline{DP}^2 + p \times AO \times DP)$* , ch'è lo stesso che $\frac{p}{3} \times OP \times (\overline{AO}^2 + \overline{DP}^2 + AO \times DP)$.

* 20, 6.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA

La superficie convessa d'un cono è uguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la metà del suo lato.

Fig. 259. Sia AO il raggio della base del cono dato, S il suo vertice, e SA il di lui lato; dico che la superficie conica sarà *circ.* $AO \times \frac{1}{2}SA$. Poichè sia, se è possibile, *circ.* $AO \times \frac{1}{2}SA$ la superficie d'un cono, che avesse per vertice il punto S, e per base il circolo descritto col raggio OB maggiore di AO.

Circoscrivete al circolo minore un poligono regolare MNPT, i cui lati non incontrino la circonferenza, che ha per raggio OB; e sia SMNPQ la piramide regolare, che avesse per base il poligono, e per vertice il punto S. Il triangolo SMN, uno di quelli che com-

pongono la superficie convessa della piramide, ha per misura la sua base MN moltiplicata per la metà dell'altezza SA, ch'è nel tempo stesso il lato del cono dato; essendo uguale quest'altezza in tutti gli altri triangoli SNP, SPQ, ec., ne segue che la superficie convessa della piramide è uguale al contorno MNPTM moltiplicato per $\frac{1}{2}$SA. Ma il contorno MNPTM ec. è maggiore di *circ.* AO; dunque la superficie convessa della piramide è maggiore di *circ.* AO$\times\frac{1}{2}$SA, e per conseguenza maggiore della superficie convessa del cono, che col medesimo vertice S avesse per base il circolo descritto col raggio OB. Ora, per il contrario, la superficie convessa del cono è maggiore di quella della piramide; perchè, se si congiunge base con base, cioè, la piramide a una piramide uguale, il cono ad un cono uguale, la superficie dei due coni circonderà da tutte le parti la superficie delle due piramidi; dunque la prima superficie sarà maggiore della seconda *; dunque la superficie del cono è maggiore di quella della piramide, che v'è contenuta. Dalla nostra supposizione nasceva il contrario; dunque questa supposizione non può aver luogo: dunque 1.° la circonferenza della base d'un cono dato moltiplicata per la metà del suo lato non può misurare la superficie d'un cono maggiore. * Lem. 2.

Dico 2.° che lo stesso prodotto non può misurare la superficie d'un cono minore. Poichè, sia BO il raggio della base del co-

no dato, e sia, se è possibile, *circ.* BO$\times\frac{1}{2}$SB la superficie del cono, di cui S è il vertice, ed AO, minore di OB, il raggio della base.

Avendo fatta la medesima costruzione di sopra, la superficie della piramide SMNPT ec. sarà sempre uguale al contorno MNPT ec. moltiplicato per $\frac{1}{2}$SA. Ora il contorno MNPT ec. è minore di *circ.* BO; SA è minor di SB; dunque, per questa doppia ragione, la superficie convessa della piramide è minore di *circ.* BO$\times\frac{1}{2}$SB, che, per supposizione, è la superficie del cono, della cui base il raggio è AO; dunque la superficie della piramide sarebbe minore di quella del cono iscritto. Ora, al contrario, è maggiore; poichè congiungendo base con base, cioè, la piramide a una piramide uguale, il cono ad un cono uguale, la superficie delle due piramidi circonderà quella dei due coni, e per conseguenza sarà la maggiore. Dunque 2.° è impossibile che la circonferenza della base d'un cono dato moltiplicata per la metà del suo lato misuri la superficie d'un cono minore.

Dunque finalmente la superficie convessa d'un cono è uguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la metà del suo lato.

Scolio. Sia L il lato d'un cono, R il raggio della sua base; la circonferenza di questa base sarà $2p$R, e la superficie del cono avrà per misura $2p$R$\times\frac{1}{2}$L, o pRL.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA

La superficie convessa del tronco di cono ADEB *è uguale al suo lato* AD *moltiplicato per la mezza-somma delle circonferenze delle sue due basi* AB, DE. Fig. 261.

Nel piano SAB, che passa per l'asse SO, conducete perpendicolarmente a SA la linea retta AF uguale alla circonferenza, che ha per raggio AO; tirate SF; e conducete DH paralella ad AF.

A motivo dei triangoli simili SAO, SDC si avrà AO : DC :: SA : SD; ed a cagion dei triangoli simili SAF, SDH s'avrà AF : DH :: SA : SD; dunque AF : DH :: AO : DC, o :: *circ.* AO : *circ.* DC *. Ma, per costruzione, AF = *circ.*AO; dunque DH = *circ.*DC. * 11, 4.

Posto ciò, il triangolo SAF, che ha per misura $AF \times \frac{1}{2}SA$, è uguale alla superficie del cono SAB, che ha per misura $circ.AO \times \frac{1}{2}SA$. Per una simil ragione, il triangolo SDH è uguale alla superficie del cono SDE. Dunque la superficie del tronco ADEB è uguale a quella del trapezio ADHF. Questa ha per misura * $AD \times \left(\frac{AF+DH}{2}\right)$; dunque la superficie del tronco di cono ADEB è uguale al suo lato AD moltiplicato per la mezza-somma delle circonferenze delle sue due basi. * 7, 3.

Corollario. Per il punto I, mezzo di AD, conducete IKL paralella ad AB, ed IM paralella ad AF; si dimostrerà, come sopra,

che IM=*circ.*IK. Ma il trapezio ADHF= AD×IM=AD×*circ.*IK. Dunque si può ancora dire che *la superficie d' un tronco di cono è uguale al suo lato moltiplicato per la circonferenza d' una sezione fatta ad ugual distanza dalle due basi.*

Fig. 261. *Scolio.* Se una linea AD situata tutta intera da una medesima parte della linea OC, e nello stesso piano, fa una rivoluzione intorno ad OC, la superficie descritta da AD avrà per misura $AD\times\left(\frac{circ.AO+circ.DC}{2}\right)$, o AD×*circ.*IK, essendo le linee AO, DC, IK perpendicolari abbassate dalle estremità, e dal mezzo della linea AD sopra l' asse OC.

Poichè, se si prolungano AD, ed OC finchè s' incontrino scambievolmente in S, è chiaro che la superficie descritta da AD è quella d' un cono troncato, delle cui basi AO, e DC sono i raggi, avendo il cono intero per vertice il punto S. Dunque questa superficie avrà la misura indicata.

Questa misura avrebbe sempre luogo quand' anche il punto D cadesse in S, il che darebbe un cono intero; ed anche quando la linea AD fosse paralella all' asse, il che darebbe un cilindro. Nel primo caso DC sarebbe nullo; nel secondo DC sarebbe uguale ad AO, e ad IK.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA

Siano AB, BC, CD *più lati successivi* Fig. 208.
d'un poligono regolare, O *il suo centro*, *ed* OI *il raggio del circolo iscritto; se si suppone che la porzion di poligono* ABCD, *situata tutta da una medesima parte del diametro* FG, *faccia una rivoluzione intorno a questo diametro, la superficie descritta da* ABCD *avrà per misura* MQ×circ.OI, *essendo* MQ *l'altezza di questa superficie, o la parte dell'asse compresa fra le perpendicolari estreme* AM, DQ.

Essendo il punto I quello di mezzo di AB, ed essendo IK una perpendicolare all'asse abbassata dal punto I, la superficie descritta da AB avrà per misura AB×*circ.*IK *. Con- * 8.
ducete AX paralella all'asse; i triangoli ABX, OIK avranno i lati respettivamente perpendicolari, cioè, OI ad AB, IK ad AX, e OK a BX; dunque questi triangoli son simili, e danno la proporzione AB : AX, o MN :: OI : IK, o :: *circ.*OI : *circ.*IK; dunque AB× *circ.*IK=MN×*circ.*OI. Donde segue che la superficie descritta da AB è uguale alla sua altezza MN moltiplicata per la circonferenza del circolo iscritto. Parimente la superficie descritta da BC è =NP×*circ* OI; la superficie descritta da CD è=PQ×*circ.*OI. Dunque la superficie descritta dalla porzion di poligono ABCD ha per misura (MN+NP+ PQ) ×*circ.* OI, o MQ×*circ.* OI; dunque è

uguale alla sua altezza moltiplicata per la circonferenza del circolo iscritto.

Corollario. Se il poligono intero è d'un numero pari di lati, e se l'asse FG passa per due vertici opposti F, e G, la superficie intera descritta dalla rivoluzione del mezzo-poligono FACG sarà uguale al suo asse FG moltiplicato per la circonferenza del circolo iscritto. Quest'asse FG sarà nel tempo stesso il diametro del circolo circoscritto.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA

La superficie della sfera è uguale al suo diametro moltiplicato per la circonferenza d'un circolo grande.

Dico 1.° che il diametro d'una sfera moltiplicato per la circonferenza del suo gran circolo non può misurare la superficie d'una sfera maggiore. Poichè sia, se è possibile,
Fig. 264. AB×*circ.*AC la superficie della sfera, che ha per raggio CD.

Al circolo, che ha per raggio CA, circoscrivete un poligono regolare d'un numero pari di lati, che non incontri la circonferenza, il cui raggio è CD; siano M, e S due vertici opposti di questo poligono; e intorno al diametro MS fate girare il mezzo-poligono MPS. La superficie descritta da questo mezzo-
* 9. poligono avrà per misura MS×*circ.*AC *; ma MS è maggiore di AB; dunque la superficie descritta dal mezzo-poligono è maggiore di AB× *circ.*AC, e per conseguenza maggiore della

superficie della sfera, il di cui raggio è CD. Ora, per il contrario, la superficie della sfera è maggiore della superficie descritta dal mezzo-poligono, poichè la prima circonda la seconda da tutte le parti. Dunque 1.° il diametro d'una sfera moltiplicato per la circonferenza del suo gran circolo non può misurare la superficie d'una sfera maggiore.

Dico 2.° che questo stesso prodotto non può misurare la superficie d'una sfera minore. Poichè sia, se è possibile, DE×*circ.*CD la superficie della sfera, che ha per raggio CA. Si farà la medesima costruzione come nel primo caso, e la superficie del solido generato dal mezzo-poligono sarà sempre uguale a MS×*circ.*AC. Ma MS è minore di DE, e *circ.*AC minore di *circ.*CD: dunque con doppia ragione la superficie del solido prodotto dal mezzo-poligono sarebbe minore di DE× *circ.*CD, e per conseguenza minore della superficie della sfera, il cui raggio è AC. Ora, al contrario, la superficie descritta dal mezzo-poligono è maggiore della superficie della sfera descritta col raggio AC, poichè la prima superficie circonda per ogni verso la seconda; dunque 2.° il diametro d'una sfera moltiplicato per la circonferenza del suo gran circolo non può essere la misura della superficie d'una sfera minore.

Dunque la superficie della sfera è uguale al suo diametro moltiplicato per la circonferenza del suo gran circolo.

Corollario. La superficie del gran circolo

si misura moltiplicando la sua circonferenza per la metà del raggio, o per la quarta parte del diametro; dunque *la superficie della sfera è quadrupla di quella d'un gran circolo*.

Scolio. Essendo così misurata la superficie della sfera, e paragonata a superficie piane, sarà facile d'aver il valore assoluto dei fusi, e triangoli sferici, di cui si è determinato di sopra il rapporto coll' intera superficie della sfera.

Primieramente il fuso, il cui angolo è A, stà alla superficie della sfera come l'angolo
* 20, 7. A stà a quattro angoli retti *, o come l'arco di gran circolo, che misura l'angolo A, stà alla circonferenza di questo medesimo gran circolo. Ma la superficie della sfera è uguale a questa circonferenza moltiplicata per il diametro; dunque la superficie del fuso è uguale all'arco, che misura l'angolo di questo fuso, moltiplicato per il diametro.

In secondo luogo ogni triangolo sferico è equivalente ad un fuso, il cui angolo è uguale alla metà dell'eccesso della somma dei
* 23, 7. suoi tre angoli sopra due angoli retti *. Siano dunque P, Q, R gli archi di gran circolo, che misurano i tre angoli del triangolo; sia C la circonferenza d'un gran circolo, e D il suo diametro: il triangolo sferico sarà equivalente al fuso, il cui angolo ha per misura $\frac{P+Q+R-\frac{1}{2}C}{2}$, e per conseguenza la sua superficie sarà $D\times\left(\frac{P+Q+R-\frac{1}{2}C}{2}\right)$.

Quindi è che nel caso del triangolo tri-rettangolo ciascuno degli archi P, Q, R è uguale ad $\frac{1}{4}$C, la loro somma è $\frac{3}{4}$C, l'eccesso di questa somma sopra $\frac{1}{2}$C è $\frac{1}{4}$C, e la metà di quest'eccesso $=\frac{1}{8}$C; dunque la superficie del triangolo tri-rettangolo $=\frac{1}{8}$C$\times$D, ch'è l'ottava parte della superficie total della sfera.

La misura dei poligoni sferici nasce immediatamente da quella dei triangoli, e d'altronde è interamente determinata dalla Prop. XXIII. Lib. VII., giacchè l'unità di misura, ch'è il triangolo tri-rettangolo, s'è ora valutata in superficie piana.

PROPOSIZIONE XI.

LEMMA

Poste le medesime cose che nella proposizione IX; se di più il punto F, *estremità dell'asse, è uno dei vertici del poligono, e si abbia* FK$<$FO; *dico che la superficie generata dalla porzion di poligono* FAI, *composta di più lati interi* FA, *e d'un mezzo lato* AI, *è minore di* FK$\times$circ.OI. Fig. 268.

Perchè la superficie descritta dalla parte FA ha per misura * FM$\times$*circ.*OI, e la superficie descritta dal mezzo-lato AI ha per misura * AI$\times$($\frac{1}{2}$*circ.*AM$+\frac{1}{2}$*circ.*IK): ora AM è minore di IK, poichè FK è minore di FO; dunque la superficie descritta da AI è minore di AI$\times$*circ.*IK, o della sua eguale MK$\times$*circ.*OI: dunque la superficie intera de- * 9. * 8.

scritta da FAI è minore di FM×*circ.*OI+ MK×*circ.*OI, o FK×*circ.*OI.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA

La superficie d'una zona sferica qualunque è uguale all'altezza di questa zona moltiplicata per la circonferenza d'un gran circolo.

Fig. 271. Sia primieramente AB un arco minore, o non maggiore del quarto della circonferenza, e sia condotta BD perpendicolare al raggio AC; dico che la zona descritta dalla rivoluzione dell'arco AB intorno ad AC ha per misura AD×*circ.*AC.

Poichè supponghiamo primieramente che questa zona abbia una maggior misura, e sia, s'è possibile, questa misura =DE×*circ.* AC. Circoscrivete all'arco AB una porzion di poligono regolare B*xyzu*, che non incontri l'arco descritto col raggio CE, e sia composto di più lati interi *uzyx*, seguiti da un mezzo-lato B*x* (1): ciò posto la superficie descritta dal poligono B*xyzu*, che gira intorno a D*u*, è minore di D*u*×*circ.*AC, * ed a maggior ragione minore di DE×*circ.*

* 11.

(1) Queste due condizioni saranno soddisfatte se si divida l'arco AB in un numero dispari di parti eguali, di cui una A*m* sia minore di AT determinata dalla tangente ET e condotta dal punto E.

AC, che, per ipotesi, è la misura della zona descritta da AB. Dunque la superficie descritta dal poligono sarebbe minore della superficie descritta dall' arco iscritto: ora, al contrario, la prima superficie è maggiore della seconda, perchè è circondata da quella per tutte le parti; dunque l' ipotesi, da cui siamo partiti, non può sussistere; dunque 1.° la misura d' una zona sferica non può esser maggiore del prodotto dell' altezza di questa zona moltiplicata per la circonferenza d' un gran circolo.

Dico in secondo luogo che la misura d' una zona sferica non può esser minore del prodotto dell' altezza di questa zona moltiplicata per la circonferenza d' un gran circolo. Poichè supponiamo che si tratti della zona descritta dall' arco FE, e sia, s' è possibile, la misura di questa zona =GE×*circ.*AC minore di GE×*circ.*CE. Iscrivete nell' arco EF una porzion di poligono regolare EMNF, i cui lati non incontrino l' arco descritto col raggio CA, ed abbassate CI perpendicolare sopra il lato EM La superficie descritta dal poligono EOF avrà per misura EG×*circ.*CI *, * 9.
maggiore di EG×*circ.*CA, che, per supposizione, è la misura della zona descritta dall' arco FE. Dunque la superficie descritta dal poligono FOE sarebbe maggiore della zona descritta dall' arco circoscritto FE: ora, per lo contrario, la seconda superficie è maggior della prima, poichè questa è circondata da tutte le parti. Dunque 2.° la misura d' una

zona sferica non può esser minor del prodotto dell'altezza di questa zona moltiplicata per la circonferenza d'un gran circolo.

Fig. 220. Segue da ciò che la zona descritta dall'arco DF ha per misura OD×*circ.*DC, almeno finchè l'arco DF non superi la quarta parte della circonferenza. Ma la sfera intera composta di due zone descritte dagli archi DF, FE ha per misura DE×*circ.*DC, o OD×*circ.*DC+OE×*circ.*DC; dunque, poichè OD×*circ.*DC è eguale alla zona descritta dall'arco DF, bisognerà che OE×*circ.*DC sia la misura della zona descritta dall'arco FE maggiore della quarta parte della circonferenza; dunque *ogni zona d'una sola base ha per misura la sua altezza moltiplicata per la circonferenza d'un gran circolo*.

Consideriamo finalmente una zona qualunque descritta dalla rivoluzione dell'arco FH intorno all'asse DE, e siano abbassate sopra l'asse le due perpendicolari FO, HQ. La zona descritta dall'arco DF ha per misura DO×*circ.*DC; la zona descritta dall'arco DH ha per misura DQ×*circ.*DC; dunque la differenza di queste due zone, o la zona descritta dall'arco FH ha per misura (DQ−DO) ×*circ.*DC, o OQ×*circ.*DC. Dunque ogni zona sferica d'una, o due basi ha per misura l'altezza di questa zona moltiplicata per la circonferenza d'un gran circolo.

Corollario. Due zone stanno fra loro come le respettive altezze; ed una zona qualunque stà alla superficie della sfera come l'altezza della zona stà al diametro.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA

Se il triangolo BAC, *ed il rettangolo* BCEF *della medesima base, e della medesima altezza girano simultaneamente intorno alla base comune* BC, *il solido descritto dalla rivoluzion del triangolo sarà la terza parte del cilindro descritto dalla rivoluzion del rettangolo.* Fig. 266. * 267.

Abbassate sull'asse la perpendicolare AD; il cono descritto dal triangolo ABD è la terza parte del cilindro descritto dal rettangolo AFBD*; parimente il cono descritto dal triangolo ADC è la terza parte del cilindro descritto dal rettangolo ADCE; dunque la somma dei due coni, o il solido descritto da ABC, è la terza parte della somma dei due cilindri, o del cilindro descritto dal rettangolo BCEF. Fig. 266. * 5.

Se la perpendicolare AD cadesse fuor del triangolo, allora il solido descritto da ABC sarebbe la differenza dei coni descritti da ABD, ACD; ma nel tempo stesso il cilindro descritto da BCEF sarebbe la differenza dei cilindri descritti da AFBD, AECD. Dunque il solido descritto dalla rivoluzion del triangolo sarà sempre la terza parte del cilindro descritto dalla rivoluzion del rettangolo della medesima base, e della medesima altezza. Fig. 267.

Scolio. Il circolo, di cui AD è il raggio,

ha per superficie $p\times\overline{AD}^2$; dunque $p\times\overline{AD}^2\times BC$ è la misura del cilindro descritto da BCEF, e $\frac{p}{3}\times\overline{AD}^2\times BC$ è la misura del solido descritto dal triangolo ABC.

PROPOSIZIONE XIV.

PROBLEMA

Fig. 268. *Supponendosi che il triangolo* CAB *faccia una rivoluzione intorno la linea* CD *condotta a piacimento fuor del triangolo da un dei suoi vertici* C, *trovar la misura del solido così generato.*

Prolungate il lato AB finchè incontri l'asse CD in D; dai punti A, e B abbassate sull'asse le perpendicolari AM, BN.

Il solido descritto dal triangolo ADC ha
* 13. per misura * $\frac{p}{3}\times\overline{AM}^2\times CD$; il solido descritto dal triangolo CBD ha per misura $\frac{p}{3}\times\overline{BN}^2\times CD$; dunque la differenza di questi solidi, o il solido descritto da ABC avrà per misura $\frac{p}{3}(\overline{AM}^2-\overline{BN}^2)\times CD$.

Si può dare un'altra forma a quest'espressione. Dal punto I, mezzo di AB, conducete IK perpendicolare a CD, e per il punto B conducete BO paralella a CD; si avrà
* 7, 3. AM+BN=2IK *, ed AM—BN=AO; dunque (AM+BN)(AM—BN), o $\overline{AM}^2-\overline{BN}^2=2IK\times$
* 10, 5. AO *. La misura del solido, di cui si tratta, è dunque espressa ancora da $\frac{2}{3}p\times IK\times AO\times CD$.

Ma, se si abbassa CP perpendicolare sopra AB, i triangoli ABO, DCP saranno simili, e daranno la proporzione AO : CP :: AB : CD, d' onde resulta AO×CD=CP×AB; d' altronde CP×AB è il doppio dell'area del triangolo ABC; laonde si ha AO×CD=2ABC: dunque il solido descritto dal triangolo ABC ha ancor per misura $\frac{4}{3}p$×ABC×KI, o, il che è lo stesso, ABC×$\frac{2}{3}$*circ.*KI; (poichè *circ.*IK =2*p.*IK). *Dunque il solido descritto dalla rivoluzion del triangolo* ABC *ha per misura l' area di questo triangolo moltiplicata per i due terzi della circonferenza, che descrive girando il punto* I *mezzo della sua base.*

Corollario. Se il lato AC=CB, la linea CI sarà perpendicolare ad AB, l' area ABC sarà uguale ad AB×$\frac{1}{2}$CI, e la solidità $\frac{4}{3}p$×ABC ×IK diventerà $\frac{2}{3}p$×AB×IK×CI. Ma i triangoli ABO CIK sono simili, e danno la proporzione AB : BO o MN :: CI : IK; dunque AB×IK=MN×CI; dunque il solido descritto dal triangolo isoscele ABC avrà per misura $\frac{2}{3}p$×MN×$\overline{\text{CI}}^2$. Fig. 269.

Scolio. La dimostrazion precedente sembra supporre che la linea AB prolungata incontri l' asse; ma i resultati sarebbero ugualmente veri quando la linea AB fosse paralella all' asse.

Infatti il cilindro descritto da AMNB ha per misura $p.\overline{\text{AM}}^2.$MN, il cono descritto da ACM=$\frac{p}{3}.\overline{\text{AM}}^2.$CM, ed il cono descritto da Fig. 270.

$BCN=\frac{p}{3}\times\overline{AM}^2.CN$. Aggiungendo insieme i due primi solidi, e togliendone il terzo, s'avrà, per il solido descritto da ABC, $p.\overline{AM}^2(MN+\frac{1}{3}CM-\frac{1}{3}CN)$: ora, a motivo di $CN-CM=MN$, quest'espressione si riduce a $p.\overline{AM}^2.\frac{1}{3}MN$, o $\frac{2p}{3}\times\overline{CP}^2.MN$; il che si accorda coi resultati di già trovati.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA

Siano AB, BC, CD *più lati successivi d'un poligono regolare*, O *il suo centro, ed* OI *il raggio del circolo iscritto; se s'immagina che il settore poligono* AOD *situato da una stessa parte del diametro* FG *faccia una rivoluzione intorno a questo diametro, il solido descritto avrà per misura* $\frac{2p}{3}.\overline{OI}^2.MQ$, *essendo* QM *la porzione dell'asse terminata dalle perpendicolari estreme* AM, DQ.

Infatti, poichè il poligono è regolare, tutti i triangoli AOB, BOC, ec. sono uguali, ed isosceli. Ora, il solido prodotto dal triangolo isoscele AOB ha per misura, secondo il corollario della proposizion precedente, $\frac{2p}{3}.\overline{OI}^2.MN$; il solido descritto dal triangolo BOC ha per misura $\frac{2p}{3}.\overline{OI}^2.NP$; ed il solido descritto dal triangolo COD ha per misura $\frac{2p}{3}.\overline{OI}^2.PQ$. Dunque la somma di questi solidi, o il solido intero descritto dal settore poligono AOD

avrà per misura $\frac{2p}{3}\times\overline{OI}^2$ (MN+NP+PQ), o $\frac{2p}{3}\times\overline{OI}^2.MQ$.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA

Ogni settore sferico ha per misura la zona, che gli serve di base, moltiplicata per la terza parte del raggio; e la sfera intera ha per misura la sua superficie moltiplicata parimente per la terza parte del raggio.

Sia ABC il settor circolare, che colla sua rivoluzione intorno ad AC descrive il settore sferico; la zona descritta da AB essendo AD× *circ.* AC, o $2p.AC.AD$; * dico che il settore sferico avrà per misura questa zona moltiplicata per $\frac{1}{3}$ AC, o sia $\frac{2p}{3}\times\overline{AC}^2.AD$. Fig. 271. * 14.

Infatti 1.° supponiamo, s'è possibile, che questa quantità $\frac{2p}{3}\times\overline{AC}^2.AD$ sia la misura d'un settore sferico maggiore, per esempio, del settore sferico descritto dal settor circolare ECF simile ad ACB.

Iscrivete nell'arco EF la porzion di poligono regolare EMNF, i di cui lati non incontrino l'arco AB; immaginate quindi che il settore poligono ENFC giri intorno ad EC nel medesimo tempo del settor circolare ECF. Sia CI il raggio del circolo iscritto nel poligono, e sia abbassata FG perpendicolare sopra EC. Il solido descritto dal settore poligono avrà per misura $\frac{2p}{3}\times\overline{CI}^2\times EG$ *: ora CI * 15.

è maggiore di AC, per costruzione, ed EG è maggiore di AD; poichè, tirando AB, EF, i triangoli EFG, ABD, che son simili, danno la proporzione EG : AD :: EF : AB :: CF : CB; dunque EG > AD.

Per questa doppia ragione $\frac{2p}{3} \times \overline{CI}^2 \times EG$ è maggiore di $\frac{2p}{3} \times \overline{CA}^2 \times AD$; la prima espressione è la misura del solido descritto dal settore poligono; la seconda è, per supposizione, quella del settore sferico descritto dal settor circolare ECF; dunque il solido descritto dal settore poligono sarebbe maggior del settore sferico descritto dal settor circolare ECF. Ora, all'opposto, è evidente che il solido di cui si parla, è minor del settore sferico, giacchè v'è contenuto. Dunque la supposizione, dalla qnale siamo partiti, non può sussistere. Dunque 1.° la zona, o base d'un settore sferico moltiplicata per la terza parte del raggio non può misurare un settore sferico maggiore.

Dico 2.° che il medesimo prodotto non può misurare un settore sferico minore. Poichè sia CEF il settor circolare, che colla sua rivoluzione produce il settore sferico dato, e supponiamo, s'è possibile, che $\frac{2p}{3} \times \overline{CE}^2 \times EG$ sia la misura d'un settore sferico minore, per esempio, di quello ch'è prodotto dal settor circolare ACB.

Restando la stessa la costruzion preecedente, il solido descritto dal settore poligono

avrà sempre per misura $\frac{2p}{3}\times\overline{CI}^2\times EG$ *; ma CI è minor di CE; dunque il solido è minore di $\frac{2p}{3}\times\overline{CE}^2\times EG$, che, per supposizione, è la misura del settor circolare ACB. Dunque il solido descritto dal settore poligono sarebbe minor del settore sferico descritto da ACB: ora, all' opposto, il solido, di cui si tratta, è maggior del settore sferico, poichè questo è contenuto in quello. Dunque 2.° è impossibile che la zona d'un settore sferico moltiplicata per la terza parte del raggio sia la misura d' un settore sferico minore. * 15.

Dunque ogni settore sferico ha per misura la zona, che gli serve di base, moltiplicata per la terza parte del raggio.

Un settor circolare ACB può aumentare fino a divenire uguale al mezzo-circolo; allora il settore sferico descritto dalla di lui rivoluzione è la sfera intera. Dunque *la solidità della sfera è uguale alla sua superficie moltiplicata per la terza parte del raggio*.

Corollario. Stando le superficie delle sfere come i quadrati dei loro raggi, queste superficie moltiplicate pe' raggi staranno come i cubi dei raggi medesimi. Dunque *le solidità di due sfere stan come i cubi dei loro raggi, o come i cubi dei lor diametri*.

Scolio. Sia R il raggio d' una sfera; la sua superficie sarà $4pR^2$, e la sua solidità $4pR^2\times\frac{1}{3}R$, o $\frac{4}{3}pR^3$. Se si chiama D il diametro, a motivo di $R=\frac{1}{2}D$, si ha $R^3=\frac{1}{8}D^3$, e perciò la solidità esprimesi ancora con $\frac{4}{3}p\times\frac{1}{8}D^3$, o $\frac{1}{6}p.D^3$.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA

La superficie della sfera stà alla superficie totale del cilindro circoscritto (comprendendovi le sue basi) come 2 stà a 3. Le solidità di questi due corpi stanno fra loro nel rapporto medesimo,

Fig. 272. Sia MPNQ il gran circolo della sfera, ABCD il quadrato circoscritto: se si fa girare insieme il mezzo-circolo PMQ, ed il mezzo-quadrato PADQ intorno al diametro PQ, il mezzo-circolo descriverà la sfera, ed il mezzo-quadrato descriverà il cilindro circoscritto alla stessa sfera.

L'altezza AD di questo cilindro è uguale al diametro PQ; la base del cilindro è uguale al gran circolo, giacchè ha per diametro AB uguale a MN; dunque la superficie convessa
* 4. del cilindro * è uguale alla circonferenza del gran circolo moltiplicata per il suo diametro. Questa misura è la medesima di quella
* 10. della superficie della sfera *; d'onde segue che *la superficie della sfera è uguale alla superficie convessa del cilindro circoscrittole.*

Ma la superficie della sfera è uguale a quattro gran circoli; dunque la superficie convessa del cilindro circoscritto è anch'essa uguale a quattro gran circoli: se vi si aggiungano le due basi, che equivalgono a due gran circoli, la superficie total del cilindro circoscritto sarà uguale a sei gran circoli; dunque la superficie della sfera stà alla superficie

totale del cilindro circoscritto come 4 stà a 6, o come 2 stà a 3. Quest'è il primo punto, che si trattava di dimostrare.

In secondo luogo, poichè la base del cilindro circoscritto è uguale a un gran circolo, e la sua altezza al diametro, la solidità del cilindro sarà uguale al gran circolo moltiplicato per il diametro *. Ma la solidità della sfera è uguale a quattro gran circoli moltiplicati per la terza parte del raggio *, il che è lo stesso che un gran circolo moltiplicato per $\frac{4}{3}$ del raggio, o per $\frac{2}{3}$ del diametro; dunque la sfera stà al cilindro circoscritto come 2 stà a 3, e per conseguenza le solidità di questi due corpi stanno fra loro come le lor superficie. * 1. * 16.

Scolio. Se s'immagina un poliedro, tutte le di cui facce tocchin la sfera, questo poliedro potrà considerarsi come composto di piramidi, che hanno tutte per vertice il centro della sfera, e le cui basi sono le differenti facce del poliedro. Ora è chiaro che tutte queste piramidi avranno per altezza comune il raggio della sfera; talmente che ogni piramide sarà uguale alla faccia del poliedro, che le serve di base, moltiplicata per la terza parte del raggio: dunque il poliedro intero sarà uguale alla sua superficie moltiplicata per la terza parte del raggio della sfera iscritta.

Si vede da ciò che le solidità dei poliedri circoscritti alla sfera stanno fra loro come le superficie di questi medesimi poliedri. Di quì è che la proprietà, che abbiam dimostrata per il cilindro circoscritto, è comune a un' infinità d'altri corpi.

Si sarebbe potuto osservare ugualmente che le superficie dei poligoni circoscritti al circolo stanno fra loro come i respettivi contorni o perimetri.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA

Fig. 273. *Supponendoci che il segmento circolare* BMD *faccia una rivoluzione intorno il diametro* AG, *che stà fuori di questo segmento, trovare il valore del solido generato.*

Abbassate sull' asse le perpendicolari BE, DF; conducete CI perpendicolar sulla corda BD; e tirate i raggi CB, CD.

Il solido descritto dal settore $BCA=\frac{2}{3}p\times\overline{CB}^2\times$ AE*; il solido descritto dal settore $DCA=\frac{2}{3}p.\times$ $\overline{CA}^2\times AF$; dunque la differenza di questi due solidi, o il solido descritto dal settore $DCB=$ $\frac{2}{3}p.\overline{CB}^2(AF-AE)=\frac{2}{3}p.\overline{CB}^2.EF$. Ma il solido descritto dal triangolo isoscele DCB ha per misura $\frac{2}{3}p.\overline{CI}^2.EF$ *; dunque il solido descritto dal segmento $BMD=\frac{2}{3}p.EF(\overline{CB}^2-\overline{CI}^2)$. Ora nel triangolo rettangolo CBI si ha $\overline{CB}^2-\overline{CI}^2=$ $\overline{BI}^2=\frac{1}{4}\overline{BD}^2$; dunque, a motivo di CA=CB, il solido descritto dal segmento BMD avrà per misura $\frac{2}{3}p.EF.\frac{1}{4}\overline{BD}^2$, o $\frac{p}{6}.\overline{BD}^2.EF$.

* 16.

* 14.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA

Ogni segmento di sfera compreso fra due

piani paralelli ha per misura la mezza somma delle sue basi moltiplicata per la sua altezza, più la solidità della sfera, di cui questa medesima altezza è il diametro.

Siano BE, DF i raggi delle basi del segmento, EF la sua altezza; talmente che il segmento sia prodotto dalla rivoluzione dello spazio circolare BMDFE intorno all'asse FE. Il solido descritto dal segmento BMD* $=\frac{p}{6}\times\overline{BD}^2\times$ EF; il tronco di cono descritto dal trapezio BDFE* $=\frac{p}{3}$.EF.$(\overline{BE}^2+\overline{DF}^2+$BE.DF); dunque il segmento di sfera, ch'è la somma di questi due solidi, $=\frac{p}{6}$.EF.$(2\overline{BE}^2+2\overline{DF}^2+2$BE.DF$+\overline{BD}^2)$. Ma, tirando BO paralella ad EF, s'avrà DO$=$DF$-$BE, $\overline{DO}^2=\overline{DF}^2-2$DF.BE$+\overline{BE}^2$, e per conseguenza $\overline{BD}^2=\overline{BO}^2+\overline{DO}^2=\overline{EF}^2+\overline{DF}^2-2DF\times$BE$+\overline{BE}^2$. Mettendo questo valore in vece di $\overline{BD}^2$ nell'espression del segmento, e scancellando ciò, che distruggesi, s'avrà per la solidità del segmento

$$\frac{p}{6}.EF.\left(3\overline{BE}^2+3\overline{DF}^2+\overline{EF}^2\right);$$

espressione che si decompone in due parti; una $\frac{p}{6}\times$EF$\times\left(3\overline{BE}^2+3\overline{DF}^2\right)$, o EF.$\left(\frac{p.\overline{BE}^2+p.\overline{DF}^2}{2}\right)$ è la mezza-somma delle basi moltiplicata per l'altezza; l'altra $\frac{p}{6}\times\overline{EF}^3$ rappresenta la stera, il cui diametro è EF*. Dunque ogni segmento di sfera ec.

Fig. 273.

* 18.

* 6.

* 9, 3.

* 16. Scol.

Corollario. Se una delle basi fosse nulla, il segmento, di cui si tratta, diventa un segmento sferico d'una sola base; dunque *ogni segmento sferico d'una sola base ha per valore la metà del cilindro della stessa base, e della stessa altezza, più la sfera, che ha per diametro quest'altezza medesima*.

Scolio generale.

Sia R il raggio della base d'un cilindro, H la sua altezza; la solidità del cilindro sarà $pR^2 \times H$ o pR^2H.

Sia R il raggio della base d'un cono, H la sua altezza; la solidità del cono sarà $pR^2 \times \frac{1}{3}H$, o $\frac{1}{3}pR^2H$.

Siano A, e B i raggi delle basi d'un cono troncato, H la sua altezza; la solidità del tronco di cono sarà $\frac{p}{3}H(A^2+B^2+A.B)$.

Sia R il raggio d'una sfera; la sua solidità sarà $\frac{4}{3}pR^3$.

Sia R il raggio d'un settore sferico, H l'altezza della zona, che gli serve di base; la solidità del settore sarà $\frac{2}{3}pR^2H$.

Siano P, e Q le due basi d'un segmento sferico, H la sua altezza; la solidità di questo segmento sarà $\left(\frac{P+Q}{2}\right)H+\frac{1}{6}pH^3$.

Se il segmento sferico ha una sola base P, essendo l'altra nulla, la sua solidità sarà $\frac{1}{2}PH+\frac{1}{6}pH^3$.

Fine degli Elementi di Geometria.

0578682